



**Titre:** Optimisation hydrodynamique de profils 2D  
Title:

**Auteur:** Didier Poueymirou-Bouchet  
Author:

**Date:** 2003

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Poueymirou-Bouchet, D. (2003). Optimisation hydrodynamique de profils 2D  
Citation: [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.  
<https://publications.polymtl.ca/7102/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/7102/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

# NOTE TO USERS

This reproduction is the best copy available.

**UMI<sup>®</sup>**



UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

OPTIMISATION HYDRODYNAMIQUE DE PROFILS 2D

DIDIER POUEYMIROU-BOUCHET  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
JUN 2003



National Library  
of Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

Acquisitions et  
services bibliographiques

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-612-86430-8*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-612-86430-8*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this dissertation.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de ce manuscrit.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the dissertation.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

OPTIMISATION HYDRODYNAMIQUE DE PROFILS 2D

présenté par: POUEYMIROU-BOUCHET Didier

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. GUIBAULT François, Ph.D., membre

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à l'égard de mon directeur de recherche, le professeur Jean-Yves Trépanier, pour ses conseils avisés. Je souhaite également le remercier de m'avoir laissé une grande liberté dans mon travail tout en me faisant bénéficier de son expérience et de ses connaissances dans les divers sujets qu'il m'a été permis d'aborder.

Je tiens par ailleurs à remercier les membres du CERCA, et tout particulièrement Christophe Tribes pour sa disponibilité et ses nombreux conseils, ainsi que Paul Labbé et Mohammed Khachan pour leur soutien technique.

Ce travail n'aurait pu voir le jour sans le support de Thi C. Vu, dont l'expérience et les conseils m'ont été d'une grande utilité tout au long de ce projet.

Enfin, j'aimerais remercier chaleureusement toute ma famille et l'ensemble de mes proches pour leur soutien tout au long de cette maîtrise et, spécialement, mes parents qui ont su me donner tous les moyens nécessaires pour accomplir mon projet.

## RÉSUMÉ

Ce mémoire porte sur l'application des principes d'optimisation aux projets de réhabilitation des dispositifs de turbines hydrauliques, en se focalisant sur les profils d'avant-directrices de telles installations. Le présent travail se propose alors d'établir une méthodologie d'optimisation afin de mener à bien de tels projets tout en prenant en compte les divers objectifs et contraintes inhérents aux processus de réhabilitation.

Plusieurs formulations du problème d'optimisation sont proposées afin, d'une part, d'y intégrer un certain nombre de contraintes d'origines variées et, d'autre part, de pouvoir convertir le problème par nature tridimensionnel en un problème bidimensionnel, réduisant de ce fait le coût qu'exige sa résolution. Cette conversion est en partie possible grâce à l'introduction du concept d'optimisation multi-points.

Des modifications sont apportées au mode de paramétrisation géométrique classique basé sur l'utilisation des NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) afin d'être en mesure d'imposer certaines des contraintes de façon implicite, c'est-à-dire sans avoir à les faire intervenir dans la formulation même du problème d'optimisation. Cette intégration de contraintes dans la paramétrisation permet, de ce fait, de réduire la complexité du problème à résoudre tout en garantissant l'obtention de solutions ayant des propriétés géométriques satisfaisantes.

L'élaboration d'une chaîne de calcul destinée à évaluer automatiquement les performances bidimensionnelles d'une configuration donnée permet de pouvoir faire appel à un algorithme d'optimisation afin de résoudre le problème formulé préalablement.



Une dernière section se penche enfin sur la validation du processus mis en place par son application sur un projet réel de réhabilitation. Les résultats alors obtenus offrent la possibilité de comparer deux algorithmes de nature différente, mais également d'observer les avantages et inconvénients des diverses formulations du problème proposées.

## RÉSUMÉ

This thesis deals with the application of optimization concepts on the rehabilitation projects of hydroelectric powerplants, by considering the stay vanes of such a machinery. A methodology has been developped to carry out such projects in a way that takes into account the existing constraints and objectives specific to the rehabilitation process.

Different formulations of this problem are proposed so that several existing constraints can be integrated. The use of multi-points formulations for optimization allows us to convert the real 3D problem in a two-dimensional one, thus reducing the cost of its solution.

NURBS (Non Uniform Rational B-Splines) are used to parameterize the geometry and modifications are made so as to satisfy some constraints in an implicit way, without having to express them in the formulation of the optimization problem. This integration of constraints in the parameterization makes it possible to reduce the complexity of the problem to be solved and to be sure that the solution has correct geometric properties.

An automatic process to get the 2D performance of a given geometry enables the use of optimization algorithms to solve the rehabilitation problem.

In the last part of the work, the methodology is validated by considering a real rehabilitation project. Several algorithms are compared, and we conclude on the relative merit of each of the proposed formulations.

## TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	viii
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xi
LISTE DES FIGURES . . . . .	xii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xvi
LISTE DES ANNEXES . . . . .	.xviii
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION .	4
1.1 Projets de réhabilitation . . . . .	4
1.2 Nature de la fonction coût et des contraintes . . . . .	8
1.2.1 Fonction coût . . . . .	8
1.2.2 Contraintes . . . . .	10
1.3 Concept d'optimisation multi-points . . . . .	13
1.4 Formulation du problème d'optimisation . . . . .	16
1.4.1 Formulation en un seul point de fonctionnement . . . . .	16
1.4.2 Formulation multi-points . . . . .	16
CHAPITRE 2 MODE DE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE . . . .	19
2.1 Paramétrisation . . . . .	19

2.2	Présentation des NURBS . . . . .	20
2.2.1	Définition . . . . .	20
2.2.2	Propriétés . . . . .	23
2.3	Application de contraintes géométriques . . . . .	27
2.3.1	Pourquoi imposer des contraintes . . . . .	27
2.3.2	Construction . . . . .	28
2.3.2.1	Imposition d'un point fixe . . . . .	28
2.3.2.2	Application . . . . .	37
2.3.3	Vers une paramétrisation dite «hybride» . . . . .	41
CHAPITRE 3 OPTIMISATION HYDRODYNAMIQUE . . . . .		44
3.1	Paramétrisation du profil d'avant directrice . . . . .	44
3.2	Chaîne de simulation 2D . . . . .	47
3.2.1	Génération du maillage . . . . .	47
3.2.1.1	Définition du domaine et de la topologie du maillage	48
3.2.1.2	Construction du maillage . . . . .	50
3.2.2	Résolution de l'écoulement quasi 2D . . . . .	50
3.2.3	Évaluation de la fonction objectif . . . . .	52
3.3	Définition des régimes d'écoulement . . . . .	53
3.4	Application et optimisation . . . . .	57
3.4.1	Adimensionnalisation des variables et des fonctions . . . . .	57
3.4.2	Implémentation du processus dans un logiciel d'optimisation	58
3.4.3	Algorithmes d'optimisation utilisés . . . . .	59
3.4.3.1	Méthodes SQP . . . . .	59
3.4.3.2	Algorithmes génétiques . . . . .	62
CHAPITRE 4 RÉSULTATS ET ANALYSE . . . . .		64
4.1	Effets du maillage et convergence de la solution . . . . .	64
4.2	Analyse des sensibilités . . . . .	69

4.3	Applications des méthodologies d'optimisation . . . . .	72
4.3.1	Choix de la méthode d'optimisation . . . . .	72
4.3.2	Optimisations «single-point» . . . . .	75
4.3.3	Comportement «off-design» . . . . .	84
4.3.4	Optimisations multi-points . . . . .	85
4.4	Validation avec le partenaire industriel . . . . .	89
CONCLUSION . . . . .		92
RÉFÉRENCES . . . . .		95
ANNEXES . . . . .		99

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Comparaison des algorithmes génétiques et de DONLP . . .	73
Tableau 4.2	Résultats des optimisations «single-point» . . . . .	84
Tableau 4.3	Pertes de charge des profils obtenus par des optimisations ponctuelles . . . . .	84
Tableau 4.4	Performances des profils issus des optimisations multi-points	85
Tableau 4.5	Comparaison des performances du profil obtenu par le par- tenaire industriel et du résultat de l'optimisation multi-points	90

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Représentation 3D d'un distributeur . . . . .	6
Figure 1.2	Exemple de modification d'un profil d'avant directrice . . .	7
Figure 1.3	Exemple de représentation de la contrainte sur la courbure .	11
Figure 1.4	Exemple de représentation de la mesure d'allongement . . .	12
Figure 2.1	Fonctions de base de degré 3, $U = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$	21
Figure 2.2	Influence de l'ordre des fonctions de base . . . . .	22
Figure 2.3	Propriété de l'enveloppe convexe pour une NURBS cubique	26
Figure 2.4	Déplacement des points de contrôle avec imposition d'un point fixe . . . . .	30
Figure 2.5	Fonctions de base pour une NURBS cubique à huit points de contrôle . . . . .	31
Figure 2.6	Effets du déplacement d'un point de contrôle . . . . .	32
Figure 2.7	Dérivées d'ordre 1 des fonctions de base pour une NURBS cubique à huit points de contrôle . . . . .	35
Figure 2.8	Dérivées d'ordre 2 des fonctions de base pour une NURBS cubique à huit points de contrôle . . . . .	35
Figure 2.9	Profil NACA 0012 . . . . .	37
Figure 2.10	Positions des points fixes . . . . .	38

Figure 2.11	Approximation du profil NACA 0012 avec imposition de points fixes . . . . .	40
Figure 2.12	Paramétrisation hybride du profil NACA0012 . . . . .	43
Figure 3.1	Profil initial d'une avant directrice . . . . .	44
Figure 3.2	Profil initial pour l'optimisation . . . . .	45
Figure 3.3	Variables de design . . . . .	46
Figure 3.4	Illustration de la périodicité . . . . .	48
Figure 3.5	Topologie du domaine . . . . .	49
Figure 3.6	Coupe du maillage structuré . . . . .	51
Figure 3.7	Rayons de calcul des pressions totales moyennes . . . . .	53
Figure 3.8	Chaîne d'évaluation de la fonction coût . . . . .	54
Figure 3.9	Processus d'optimisation . . . . .	58
Figure 4.1	Convergence de la solution en fonction du résidu maximal . . . . .	66
Figure 4.2	Convergence de la solution en fonction de la taille du maillage . . . . .	67
Figure 4.3	Temps de calcul en fonction de la taille du maillage . . . . .	68
Figure 4.4	Exemples de sensibilités dans une région centrée sur : (a) le point initial (b) un point proche de l'optimum . . . . .	71
Figure 4.5	Profil optimisé par la méthode génétique pour un angle d'entrée de 20 degrés . . . . .	73



Figure 4.6	Profil obtenus par les optimisations pour chacun des angles d'entrée . . . . .	75
Figure 4.7	Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 15 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé .	77
Figure 4.8	Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 20 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé .	78
Figure 4.9	Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 25 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé .	79
Figure 4.10	Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 30 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé .	80
Figure 4.11	Lignes de courant obtenues avec le profil initial pour un angle d'entrée de 20 degrés . . . . .	81
Figure 4.12	Lignes de courant obtenues avec le point de départ de l'optimisation pour un angle d'entrée de 20 degrés . . . . .	82
Figure 4.13	Lignes de courant obtenues avec le profil optimisé pour un angle d'entrée de 20 degrés . . . . .	82
Figure 4.14	Résultats des optimisations multi-points et «single-point» pour des angles en entrée de : (a) 20, 25 et 30 degrés (b) 15, 20 et 25 degrés . . . . .	86
Figure 4.15	Comparaison des optimisations multi-points et «single-point» pour les deux zones étudiées : (a) zone 1 (20-25-30 degrés) (b) zone 2 (15-20-25 degrés) . . . . .	87

Figure 4.16	Comparaison du profil obtenu par le partenaire industriel et du résultat de l'optimisation multi-points . . . . .	90
Figure I.1	Profil NACA 0012 . . . . .	99
Figure I.2	Disposition des points de collocation . . . . .	101
Figure I.3	Interpolation par une B-spline cubique à 9 points de contrôle	103

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

### Sigles

CFD	Computational Fluid Dynamics
NURBS	Non-Uniform Rational B-Splines
SLP	Sequential Linear Programming
SQP	Sequential Quadratic Programming

### Caractères usuels

$Al_{max}$	Pourcentage d'allongement maximal du profil
$C(u)$	Vecteur position du point de paramètre $u$ sur la NURBS
$C_{lim}$	Courbure limite imposée au profil
$C_{max}$	Courbure maximale du profil
$f(x)$	Fonction coût ponctuelle
$f^*$	Valeur cible de la fonction coût
$f^{worst}$	Valeur initiale de la fonction coût
$F(x)$	Fonction coût multipoints
$g(x)$	Vecteur des contraintes d'inégalité
$h(x)$	Vecteur des contraintes d'égalité
$L$	Longueur du profil courant
$m$	Dimension du vecteur nodal
$n$	Nombre de points de contrôle de la NURBS
$N_{i,p}$	$i$ ème fonction de base B-splinaire de degré $p$

$L_0$	Longueur du profil de référence
$p$	Degré des fonctions de base B-splinaire
$P_s$	Pression statique
$P_{tot}^{amont}$	Pression totale moyenne en amont du profil
$P_{tot}^{aval}$	Pression totale moyenne en aval du profil
$P_i$	Point controle
$Q_i$	Point de collocation
$R_{min}$	Rayon de courbure minimal du profil
$R_{i,p}$	Fonction de base rationnelle de degré $p$
$u$	Paramètre de paracours d'une NURBS
$u_i$	$i$ ème noeud du vecteur nodal
$\bar{u}_i$	Paramètre de parcours correspondant au point de collocation $Q_i$
$U$	Vecteur nodal d'une NURBS
$x$	Vecteur de design
$\bar{x}$	Vecteur de design adimensionnel
$x_{imin}, x_{imax}$	Bornes inférieure et supérieures de la $i$ ème variable de design

### Caractères grecs

$\omega_i$	Poids associé au point de contrôle $P_i$ ou à la fonction coût ponctuelle dans la fonction multi-objectifs
------------	--

### Symboles

$\nabla$	Opérateur gradient
$T$	Opérateur transposé

**LISTE DES ANNEXES**

ANNEXE I	PROBLÈME D'INTERPOLATION PAR UNE B-SPLINE	99
ANNEXE II	DISTRIBUTION DE L'ANGLE DE L'ÉCOULEMENT . .	104

## INTRODUCTION

L'augmentation constante de la concurrence dans le monde de la production d'énergie hydroélectrique, comme dans de nombreux autres secteurs à haute technologie, a introduit la nécessité pour les différents acteurs concernés d'exploiter au mieux les ressources dont ils disposent afin de gagner de précieuses parts de marché. Ainsi, le recours à la CFD (Computational Fluid Dynamics) lors des phases de conception s'est généralisé et a permis aux équipes d'ingénieurs de prévoir d'une façon relativement fiable le comportement d'un fluide dans une configuration donnée ((Drtina et Sallaberger (1999))). Dans le cas de la conversion d'énergie hydraulique en énergie mécanique, ces outils offrent en particulier la possibilité d'évaluer à l'avance les performances et donc le rendement énergétique d'un dispositif de turbine hydraulique.

Pourtant, malgré la grande expérience de ces fabricants et les progrès continuels des moyens de calculs qui fournissent une aide très appréciable, la conception d'un modèle de turbine hydraulique est un travail qui peut s'avérer long voir fastidieux, et donc très dispendieux. Afin de gagner un temps précieux dans cette phase de conception ainsi que de garantir de meilleures performances de l'ensemble, l'utilisation d'une méthodologie d'optimisation appliquée à ce problème peut constituer une importante source d'améliorations du procédé existant ((Richter *et al.* (1999); Lipej et Poloni (2000); Sallaberger *et al.* (2001); Eisinger et Ruprecht (2001); Tomas *et al.* (2002))).

Par ailleurs, dans un marché en plein essor et qui ne cesse d'évoluer, la part des projets de réhabilitation d'installations déjà existantes ne cesse d'augmenter puisque ces derniers permettent effectivement d'améliorer le comportement du dispositif sans pour autant avoir à en remplacer toutes les composantes. Cependant, cette

classe de projets correspond le plus souvent à un type de problèmes complexes à résoudre, puisqu'il est alors question de faire coexister des nouvelles unités avec d'anciens composants rénovés de la meilleure façon possible, dans le but d'améliorer le comportement global du dispositif. L'existence de nombreuses contraintes ainsi que la prise en compte des interactions entre les différents éléments nécessite alors la mise en place d'un procédé de conception qui puisse répondre au plus vite aux attentes du fabricant tout en exploitant son expérience dans le domaine.

Ce processus d'optimisation peut alors permettre de réduire les délais de conception mais peut également fournir aux ingénieurs des solutions peu conventionnelles ayant certains aspects novateurs. Un tel procédé peut donc ouvrir aux concepteurs de nouvelles voies d'exploration jusqu'alors inconnues malgré toute l'expérience des ingénieurs dans ce domaine.

Afin de mener à bien une méthodologie d'optimisation applicable tout particulièrement dans le cas de projets de réhabilitation, il est indispensable de formuler en détail le problème d'optimisation que l'on souhaite résoudre. Il est donc question dans un premier temps d'analyser les différentes caractéristiques qui doivent être améliorées, et de définir alors une ou plusieurs fonctions permettant de prendre en compte et d'évaluer de façon quantitative les réponses du système aux exigences du concepteur. Il est également nécessaire d'exprimer les diverses contraintes auxquelles il faut répondre lors de la conception du dispositif, ces contraintes pouvant être de nature variée (structurelles, économiques, pratiques. . .).

Il ne faut néanmoins pas négliger les effets de ces contraintes sur la complexité du problème d'optimisation qu'on se propose de résoudre, puisque plus le problème est contraint, plus il risque d'être difficile de le résoudre à l'aide d'un algorithme d'optimisation. Il est toutefois possible de réduire le nombre de contraintes explicites, c'est-à-dire les contraintes formulées dans le problème d'optimisation, en les

intégrant en partie dans la paramétrisation utilisée, moyennant certaines modifications de cette dernière. Un tel mode de représentation géométrique permet donc de faciliter la résolution en simplifiant la formulation du projet d'optimisation.

Enfin, l'utilisation d'un procédé automatique d'optimisation nécessite la mise en place d'un processus de simulation et d'analyse des caractéristiques de l'écoulement, afin de pouvoir déterminer de façon relativement précise les valeurs des fonctions objectifs et contraintes, et ceci de façon totalement automatique et le plus rapidement possible.

L'objet de ce travail est donc de concevoir et d'appliquer un tel processus d'optimisation au cas de la réhabilitation d'un distributeur, cette réhabilitation visant à améliorer les performances de profils d'avant-directrices. Nous présenterons pour cela dans un premier chapitre une description détaillée du problème à résoudre et du cadre dans lequel il s'inscrit, et également des moyens mis en oeuvre afin de convertir le problème tridimensionnel en un problème d'optimisation bidimensionnel nettement moins coûteux à résoudre. Le deuxième chapitre expose quant à lui le mode de représentation géométrique qui a été choisi ainsi que les différentes modifications apportées dans le but de mieux répondre aux diverses exigences. Le troisième chapitre décrit essentiellement le processus de simulation numérique permettant de prévoir les performances du profil que l'on cherche à optimiser pour un ensemble de régimes de fonctionnement. Le dernier chapitre expose finalement les différents résultats obtenus pour un projet de réhabilitation donné et permet de conclure quant à la validité du processus en les comparant aux profils mis au point pour ce même projet par une équipe de concepteurs expérimentés. Il offre également la possibilité de comparer l'utilisation d'algorithmes génétiques à celle de méthodes à gradients, et de déterminer ainsi la classe de méthode la mieux adaptée aux projets de design préliminaire dans lequel s'inscrit notre travail.



## CHAPITRE 1

### FORMULATION DU PROBLÈME D'OPTIMISATION

Le but du présent chapitre est de décrire dans un premier temps le cadre dans lequel s'inscrit l'optimisation qu'on se propose de mener à bien, c'est-à-dire les tenants et aboutissants des projets de réhabilitation de dispositifs de production d'énergie hydroélectrique. Ceci permettra alors de faire un inventaire précis des fonctions objectifs à améliorer et des diverses contraintes à respecter. Nous serons ainsi en mesure d'établir les différentes formulations possibles du problème d'optimisation, que ce soit pour une optimisation pour un point de fonctionnement ou pour une gamme de régimes de fonctionnement d'un profil d'aube donné.

#### 1.1 Projets de réhabilitation

Dans la conjoncture actuelle du marché de production hydroélectrique, la part des projets de réhabilitation d'anciennes installations ne cesse d'augmenter, suscitant ainsi un regain d'intérêt de la part des constructeurs de turbines hydrauliques qui y voient une source de profits non-négligeables: De tels projets font donc l'objet de recherches avancées ((Sallaberger *et al.* (2001))) afin de développer les outils nécessaires à une optimisation des performances de l'installation que l'on souhaite rénover.

Le principe de ces projets de réhabilitation est non pas d'améliorer le site de production en le modifiant dans sa totalité, mais de remplacer uniquement les pièces maîtresses, les autres parties étant conservées en l'état ou rénovées, afin d'améliorer les performances du dispositif. Le but final étant bien entendu d'augmenter

les capacités de production de l'ensemble (augmentation du rendement, du débit, élargissement de la gamme de fonctionnement) avec un temps de livraison le plus court possible, les exigences au niveau de la conception de telles installations sont évidemment accrues. En outre, l'existence d'interactions entre les anciens et les nouveaux composants rend la tâche d'autant plus dure à accomplir pour les équipes de concepteurs.

C'est donc dans ce cadre que s'inscrit l'optimisation des avant-directrices d'une turbine hydraulique de type Francis. Pour des raisons économiques évidentes, ces composants ne sont pas totalement remplacés au cours de projets comme ceux définis précédemment. Au sein des turbines hydrauliques, la couronne formée par les avant-directrices a pour principal but de préserver l'intégrité de la bache spirale afin que celle-ci puisse résister aux importantes forces de pressions qui s'appliquent dans cette zone. Ainsi, lors de la réalisation des premiers centres de production hydroélectrique à l'aide de turbines de type Francis, les profils de ces avant-directrices avaient une forme quel que peu rudimentaire qui permettait de satisfaire ce critère structurel tout en pré-orientant l'écoulement afin que celui-ci puisse être dirigé en aval de façon optimale par les aubes directrices. La figure 1.1 permet de visualiser une représentation tridimensionnelle d'un distributeur avant l'application du processus de réhabilitation.

Le principal objectif de la réhabilitation des ces profils est donc d'optimiser les performances hydrodynamiques (réduction des pertes de charge, amélioration du changement d'orientation de l'écoulement) tout en préservant le rôle de maintien de la bache spirale. Par ailleurs, cette rénovation du distributeur doit être effectuée en conservant la majeure partie du profil des avant-directrices afin de réduire les coûts de mise en place des nouveaux modèles (un changement complet des aubes avant-directrices nécessiterait un remplacement dans sa totalité du dispositif de distribution comprenant la bache spirale, ce qui rendrait le projet de réhabilitation

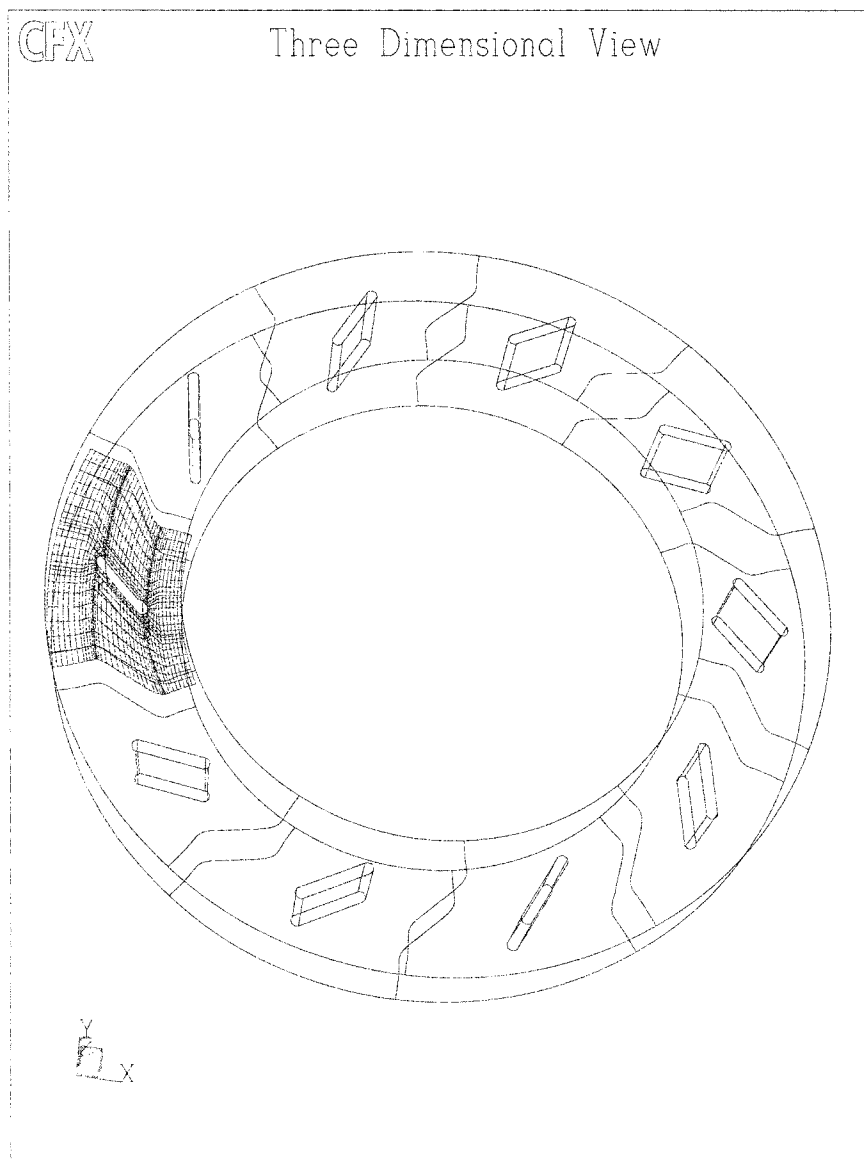


Figure 1.1 Représentation 3D d'un distributeur

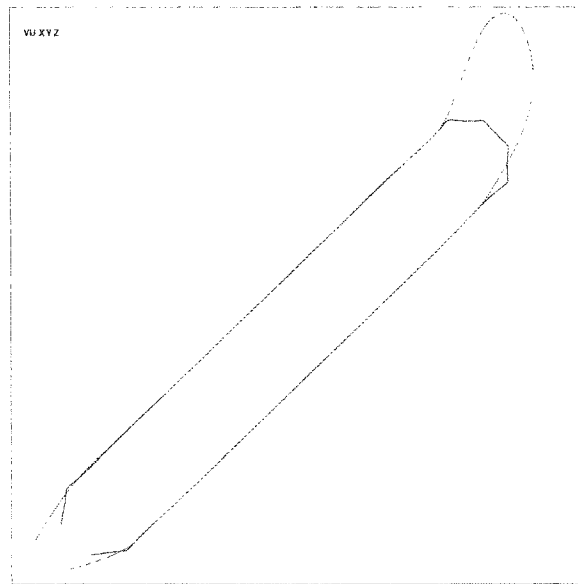


Figure 1.2 Exemple de modification d'un profil d'avant directrice

extrêmement dispendieux et donc irréalisable d'un point de vue économique). Il s'agit ainsi de modifier uniquement les régions du bord d'attaque et du bord de fuite de ces profils tout en conservant le corps de l'aube déjà en place. La figure 1.2 permet de mieux cerner le type de modifications que l'on cherche à appliquer sur un profil d'avant-directrice au cours d'un projet de réhabilitation : les zones du bord d'attaque et du bord de fuite sont modifiées par ajout de matière à certains endroits mais aussi par suppression lorsque cela s'avère nécessaire.

Enfin, il ne faudra pas oublier lors du processus d'optimisation que le profil que l'on étudie est sujet à de fortes contraintes structurelles en raison du champ élevé de pressions, et qu'il est au coeur d'un dispositif complexe et très peu versatile, ce qui réduit grandement les degrés de libertés quant à la modification du profil existant.

## 1.2 Nature de la fonction coût et des contraintes

### 1.2.1 Fonction coût

La définition d'une ou plusieurs fonctions coût permet à l'utilisateur d'évaluer les performances d'un profil d'avant-directrice sur la base de divers critères préalablement fixés. Il s'agit donc ici de déterminer, à la vue de l'expérience acquise dans les projets passés et selon les besoins formulés par les clients, les caractéristiques que l'on désire améliorer au cours de l'optimisation.

Pour ce faire, il est nécessaire de se pencher sur la position et le rôle de la couronne des avant-directrices au sein d'un montage de turbine hydraulique. Ces aubes avant-directrices se situent donc en aval de la bêche spirale et juste en amont de la couronne des aubes directrices. Elles font pénétrer le fluide dans le système d'une façon radiale, le détournant de façon très sommaire. Comme nous l'avons évoqué précédemment, malgré leur position très en aval dans la chaîne de conversion d'énergie hydraulique, le principal objectif des avant-directrices est de maintenir la bêche spirale afin qu'elle résiste aux forces de pression. Ce maintien doit par ailleurs être assuré en générant le moins de pertes énergétiques possibles, et en engendrant un profil de vitesse en sortie le plus uniforme possible.

On voit donc ici que le critère sur lequel il est important d'agir est le rendement énergétique de la couronne avant-directrice. Ces pertes énergétiques peuvent être évaluée en déterminant les pertes de charges que génère la présence de l'aube dans l'écoulement, c'est-à-dire la différence de pression totale entre l'entrée et la sortie du distributeur. Il faut également noter que la forme des avant-directrices a un impact sur les performances de la turbine en aval, et donc sur le rendement énergétique des aubes directrices et de la roue. Cette influence ne peut cependant être évaluée qu'en effectuant une simulation de l'ensemble du dispositif, ce qui est bien entendu

trop complexe et par conséquent trop dispendieux. Nous nous concentrerons donc par la suite uniquement sur les pertes propres à la couronne avant-directrice, et non sur celles induites en aval par cette dernière.

Rappelons ici que la pression totale est définie comme étant la somme de la pression statique et de la pression dynamique (correspondant à l'énergie cinétique du fluide), de sorte qu'elle s'exprime par :

$$P_{tot} = P_s + \frac{\rho v^2}{2}$$

Notons par ailleurs que la pression totale est généralement exprimée de façon relative, c'est-à-dire par rapport à la pression atmosphérique soit :

$$P_{tot} = (P_s - P_{atm}) + \frac{\rho v^2}{2}$$

Ainsi, il est possible d'exprimer une fonction coût permettant de tenir compte des pertes de charge au travers du distributeur de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{P_{tot}^{amont} - P_{tot}^{aval}}{P_{tot}^{amont}}$$

où  $f(x)$ , fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$  ( $N$  étant la dimension de l'espace de design), est la fonction objectif à minimiser et  $x$  le vecteur de design que nous expliciterons par la suite.

### 1.2.2 Contraintes

Comme nous l'avons vu précédemment, chacun des profils composant la couronne avant-directrice que l'on cherche à optimiser est sujet à de nombreuses contraintes principalement de nature structurelle ou liées à la phase de manufacture de l'aube, sans oublier les contraintes imposées par le cadre où se situe cette optimisation, c'est-à-dire celui de projets de réhabilitation.

Il est alors possible de définir une première contrainte provenant non seulement des limitations liées à la fabrication du profil mais aussi de considérations de nature structurelle : la courbure maximale du profil au niveau du bord d'attaque. En effet, le profil généré à l'issue de l'optimisation ne doit pas comporter une courbure trop élevée (ou un rayon de courbure trop faible, ce qui est équivalent) au niveau du bord d'attaque car celui-ci serait d'une part difficilement réalisable lors de la réhabilitation des aubes, et serait d'autre part relativement fragile en raison de sa faible épaisseur au niveau du bord d'attaque (portion du profil soumise à de fortes contraintes dues à la pression), en plus d'avoir tendance à s'éroder rapidement avec le temps.

Il est donc possible de déterminer au cours de l'optimisation si cette contrainte est respectée en évaluant la courbure maximale du profil ( $C_{max}$ ) et en la comparant à une courbure limite fixée initialement ( $C_{lim}$ ). Ceci nous permet ainsi d'exprimer une première contrainte d'inégalité sous la forme :

$$g_1(x) \geq 0 \quad \text{avec} \quad g_1(x) = \frac{C_{lim} - C_{max}}{C_{lim}}$$

$g_1(x)$  est fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ .

Cette contrainte d'inégalité est représentée géométriquement par la figure 1.3 qui permet de bien visualiser cette notion de rayon de courbure limite du bord d'attaque.

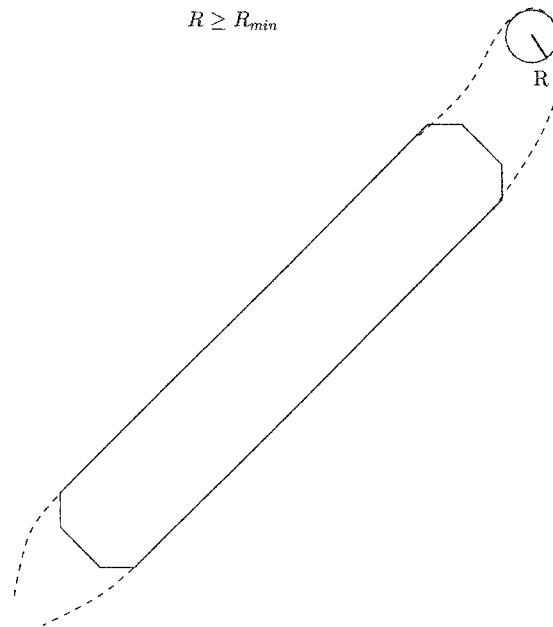


Figure 1.3 Exemple de représentation de la contrainte sur la courbure

En outre, le dispositif dans lequel les aubes réhabilitées doivent s'intégrer impose comme nous l'avons dit de nombreuses limitations sur l'espace de design qu'il est possible d'explorer. Une des principales limitations est l'allongement maximal du profil optimisé. En effet, étant donné que la bache spirale n'est pas ou très peu modifiée au cours de la réhabilitation, tout comme les frontières de la couronne de distribution, il est nécessaire de limiter la longueur du profil optimisé afin que son bord d'attaque ne pénètre dans la bache spirale. Le profil aurait de ce fait une durée de vie très limitée puisqu'il serait soumis à de très fortes contraintes sans être supporté à ses extrémités. De plus il perturberait de façon importante l'écoulement tout autour de la couronne de distribution. La contrainte sur la longueur du profil peut être évaluée en mesurant son allongement par rapport à un profil dit de référence (voir figure 1.4) et en adimensionnalisant la différence obtenue par la



longueur  $L_0$  du profil de référence (afin d'obtenir le pourcentage d'allongement).

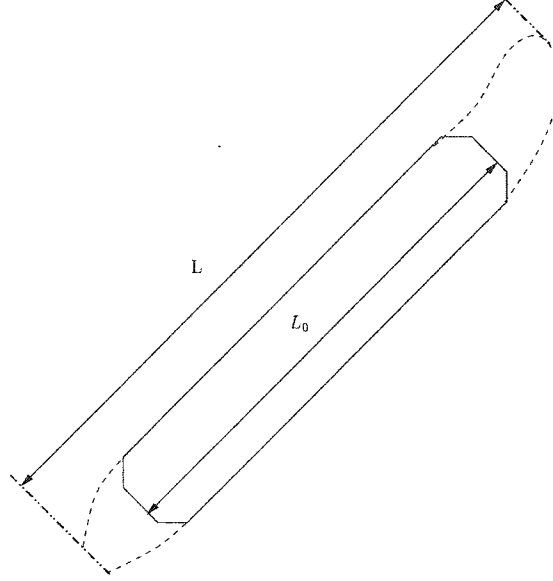


Figure 1.4 Exemple de représentation de la mesure d'allongement

Il est alors possible de formuler une deuxième contrainte au problème. L'allongement doit demeurer inférieur à un pourcentage de référence ( $Al_{max}$ ) fixé par l'utilisateur dans la phase préliminaire d'optimisation :

$$g_2(x) \geq 0 \quad \text{avec} \quad g_2(x) = Al_{max} - \frac{L(x) - L_0}{L_0}$$

où  $L(x)$ , fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ , est la longueur du profil courant et  $g_2(x)$ , fonction de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}$ , est la contrainte sur l'allongement.

A l'issue de cette phase d'analyse des contraintes, on obtient un vecteur des contraintes d'inégalité  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$  où  $N_g$  est le nombre de contraintes d'inégalité ( $N_g=2$  dans notre cas). Il est toutefois impératif de rajouter à ce vecteur les contraintes qu'implique la limitation de l'espace de design que l'on se propose d'explorer, c'est-à-dire les bornes sur les diverses variables de design.

### 1.3 Concept d'optimisation multi-points

Diverses contraintes économiques nous ont porté à simplifier le problème d'optimisation de la couronne avant-directrice en ne considérant qu'une seule aube de cette couronne et en procédant à une optimisation en deux dimensions afin de réduire le temps de calcul (et donc le coût) exigé par un tel projet de réhabilitation. La couronne finale est ainsi obtenue en reproduisant le profil optimal par rotations successives autour de l'axe de la turbine. Cette transformation d'un problème d'optimisation d'un ensemble de profils 3D en une optimisation 2D d'un seul profil nécessite l'introduction du concept d'optimisation multi-points afin de pouvoir prendre en compte les effets tridimensionnels, et d'assurer que l'amélioration des performances 2D de l'aube se traduise effectivement par une amélioration conséquente du comportement 3D global de la couronne avant-directrice.

En effet, pour un même point de fonctionnement de la turbine, chacune des aubes de la couronne avant-directrice est soumise à des conditions d'écoulement différentes. Ainsi, comme l'illustre l'annexe II, l'angle de l'écoulement «vu» par un des profils de la couronne varie selon sa position angulaire. En outre, la présence de parois solides dans la direction axiale introduit elle-aussi des effets tridimensionnels qui modifient cet angle (l'angle de l'écoulement dans le plan médian est différent de ceux dans les plans parallèles). En revanche, de par la géométrie même de la bache spirale, le débit et donc la composante radiale de la vitesse de l'écoulement en entrée ne varie que très peu en fonction de la position angulaire.

L'optimisation 3D de la couronne incluant toutes les aubes étant bien entendu irréaliste puisque trop dispendieuse, il est donc nécessaire de tenir compte de cette dépendance spatiale du régime de fonctionnement lors de la formulation du problème d'optimisation. Une première solution peut être de calculer un angle d'entrée moyen sur toute la périphérie de la couronne et de procéder à une optimisation d'une aube avec cet angle. Pourtant, les performances de la couronne obtenue en dupliquant par rotation le profil issu de l'optimisation peuvent s'avérer moins bonnes que celles que l'on serait en droit d'attendre. En effet, de nombreuses aubes sont confrontées à des conditions en entrée pour lesquelles leur comportement n'est pas optimal. Une autre solution peut être de diviser la couronne en zones au sein desquelles les amplitudes des variations des angles d'entrée sont réduites. Cette solution augmente d'une part le coût de l'optimisation et ne résout pas complètement le problème puisque l'angle de l'écoulement continue à varier de façon non-négligeable dans chacune des zones (à moins de multiplier le nombre de ces zones, ce qui peut devenir très dispendieux) et également dans la direction axiale.

Cette altération des performances pour un régime «hors-design» peut être expliquée par le fait qu'un problème «classique» d'optimisation donne lieu à une amélioration des performances hydrodynamiques pour un régime de fonctionnement spécifique. Ainsi, si on évalue les performances de ce même profil pour un régime de fonctionnement différent, il y a de fortes chances que celles-ci soient complètement différentes, le profil n'ayant à aucun moment été conçu pour de telles conditions. En effet, une optimisation donnée est menée en un point de fonctionnement précis et le résultat obtenu correspond donc à l'optimum pour ce point. Si on change de régime, cet optimum sera bien évidemment différent de sorte que le profil obtenu précédemment (c'est-à-dire grâce à une optimisation pour un autre point) donnera lieu à de moins bonnes performances pour ce nouveau régime. Ainsi, le recours à une unique optimisation pour un seul point permet effectivement d'améliorer de

façon optimale les performances du profil pour ce régime (à condition de trouver l'optimum global pour ce point), sans toutefois garantir une plage de fonctionnement optimum puisque les performances du profil obtenu peuvent se dégrader très fortement si les conditions d'opération ne sont plus les mêmes. Ce phénomène provient en partie du fait que lors d'une optimisation, l'algorithme utilisé tend à «exploiter les faiblesses» de la fonction coût, ce qui conduit naturellement à des profils spécifiques au régime choisi afin d'évaluer cette même fonction objectif.

Afin d'améliorer les performances sur une plus large plage d'opération du profil, on peut utiliser l'optimisation multi-points, qui n'est qu'un cas particulier des problèmes d'optimisation multi-objectifs. (Huyse *et al.* (2002)) ont ainsi montré qu'il existait un moyen de traiter ce problème en menant une optimisation non pas pour un point d'opération mais pour plusieurs conditions simultanément. La création d'une fonction objectif rassemblant les résultats pour chaque point conduit alors à l'obtention d'un profil aux performances plus «globales».

Dès lors que les objectifs et contraintes de l'optimisation ont été fixés, nous sommes en mesure d'établir les diverses formulations possibles correspondant à chacun des problèmes que l'on souhaite résoudre.

## 1.4 Formulation du problème d'optimisation

Il est ici impératif de distinguer les deux sortes d'optimisation évoquées dans la section précédente, puisqu'à chacun de ces cas correspond une formulation bien précise.

### 1.4.1 Formulation en un seul point de fonctionnement

Le premier type d'optimisation abordé est bien entendu l'optimisation en un point d'optimisation, celle-ci visant à optimiser un profil donné pour un seul point d'opération fixé par l'utilisateur.

Le problème se formule de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{tel que} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

où  $f(x)$  est la fonction coût,  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ , le vecteur des  $N_g$  contraintes d'inégalité,  $x$  étant bien entendu le vecteur des variables de design.

Il est à noter que la fonction objectif  $f(x)$  représente dans ce cas les performances (pertes de charge dans notre cas) évaluées au point de fonctionnement sélectionné.

### 1.4.2 Formulation multi-points

Le problème d'optimisation multi-points s'apparente comme nous l'avons dit à un problème d'optimisation multi-objectifs, où les différents objectifs sont en fait de

même nature et correspondent aux performances du profil en divers régimes de fonctionnement.

Une approche «naturelle» pour ce genre de problème, développée dans un grand nombre de travaux ((Huyse *et al.* (2002)), (Vanderplaats (1999)), (Talbi (1999))) est de convertir ce problème multi-objectif en un problème uni-objectif en intégrant les différentes fonctions objectifs en une seule fonction coût. La formulation du problème ne diffère donc pas en apparence de celle présentée pour le problème d'optimisation classique et se présente sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \min_x & F(x) \\ \text{t.q.} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

où  $F(x)$  est la fonction coût,  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_g}$ , le vecteur des  $N_g$  contraintes d'inégalité.

Ici, la fonction objectif  $F(x)$  ne représente pas les performances évaluées pour un unique point d'opération mais bien une combinaison des performances du même profil pour chacun des points de fonctionnement fixés par l'utilisateur, ces régimes faisant partie de la plage d'opération sur laquelle on désire améliorer le comportement du profil. La définition de cette fonction coût s'avère être une phase critique de l'optimisation, et il n'existe pas d'expression unique à sa définition.

Ainsi, on retrouve plusieurs formes plus ou moins complexes de cette fonction, chacune permettant de mettre l'emphasis sur des points différents.

Une première possibilité, utilisée par (Huyse *et al.* (2002)), est d'opter pour une combinaison linéaire des fonctions coûts évaluées pour chaque point de fonctionnement, l'influence que l'on souhaite attribuer à chacun des points sur la fonction

objectif finale pouvant être exprimée par l'intermédiaire de poids. Cette fonction s'exprime alors sous la forme :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N_{pts}} \omega_i f_i(x) \quad (1.1)$$

où  $f_i(x)$  représente la fonction objectif du  $i$ ème point d'opération,  $\omega_i$  le poids correspondant à ce même point et  $N_{pts}$  le nombre de points d'opération choisis au sein de la plage de fonctionnement.

Une autre expression permettant de tenir compte des gradients des fonctions coût des divers points a été introduite par (Vanderplaats (1999)) et par (Talbi (1999)), et s'énonce de la façon suivante :

$$F(x) = \left( \sum_{i=1}^{N_{pts}} \left| \omega_i \frac{f_i(x) - f_i^*}{f_i^{worst} - f_i^*} \right|^p \right)^{1/p} \quad (1.2)$$

où :

- $f_i^*$  est l'objectif à atteindre pour le point de fonctionnement  $i$  (on prend généralement la valeur de la fonction coût obtenue pour l'optimisation single-point pour ce point de fonctionnement)
- $f_i^{worst}$  est la valeur de la fonction coût initiale
- $1 \leq p \leq \infty$  définit le type de norme que l'on désire utiliser. Dans le cas où pour chaque point de fonctionnement, on n'obtient pas une fonction objectif inférieure à la cible (ce qui est généralement le cas), il suffit de prendre la norme 1, la fonction étant alors différentiable. C'est donc vers ce dernier type de norme que nous nous sommes dirigés puisque chacun des membres de la somme ne change jamais de signe au cours de l'optimisation.

## CHAPITRE 2

### MODE DE REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

La paramétrisation géométrique du profil présentée dans ce chapitre permet de créer un ensemble de points de contrôle régissant la forme de l'aube avant-directrice, et dont un certain nombre constituera le vecteur de design pour l'optimisation à venir. Nous nous proposons donc de présenter ici le mode de représentation géométrique utilisé basé sur les NURBS. Nous introduisons quelques modifications pour paramétriser le problème le plus efficacement possible et tout en tenant compte explicitement d'une partie des contraintes.

#### 2.1 Paramétrisation

Lorsqu'on désire procéder à l'optimisation d'un profil de nature quelconque (issu du domaine de l'aéronautique, de l'hydraulique, de l'automobile ...), il est nécessaire de mettre en place une paramétrisation de sa géométrie. En outre, cette paramétrisation doit être en mesure de représenter une vaste gamme de profils différents, ce qui représente l'espace de design, en utilisant le moins de paramètres possible afin de réduire les coûts de l'optimisation à venir.

Au cours de leurs travaux, (Lépine *et al.* (2001)) ont montré que les NURBS présentaient une bonne aptitude à satisfaire ces critères particulièrement spécifiques au domaine de l'optimisation. Ils ont prouvé que cette paramétrisation permettait de représenter une grande gamme de profils aérodynamiques existants avec un nombre réduit de paramètres, et ceci avec une précision satisfaisant les tolérances de fabrication et également les sensibilités des résolveurs numériques aux erreurs



d'approximation.

C'est donc vers un tel mode de paramétrisation que nous nous sommes orientés, ce choix étant non seulement motivé par les remarques énoncées précédemment mais également par les diverses possibilités d'expression de contraintes géométriques inhérentes à ce type de paramétrisation.

## 2.2 Présentation des NURBS

### 2.2.1 Définition

Les NURBS sont définies à partir de l'expression suivante :

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i} \quad (2.1)$$

où :

- $\mathbf{C}(u)$  est la géométrie que l'on souhaite représenter
- $u$  est le paramètre de parcours ( $u \in [0, 1]$ )
- $n$  est le nombre de points de contrôle
- $\mathbf{P}_i$  sont les vecteurs positions des points de contrôle
- $N_{i,p}$  est la  $i$ ème fonction de base de degré  $p$  correspondant à une B-spline d'ordre  $p + 1$
- $\omega_i$  sont les poids associés à chacun des points de contrôle.

Les NURBS font donc appel aux fonctions de base du type B-spline que l'on peut définir de la façon suivante. Soit  $U = u_0, \dots, u_m$  une série croissante de nombre réels, c'est-à-dire  $u_i \leq u_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, m - 1$ . Les réels  $u_i$  sont appelés *noeuds* et  $U$  est le *vecteur nodal*. La  $i$ ème fonction de base du type B-spline d'ordre  $p + 1$  est

définie pour  $0 \leq i \leq m - p - 1$  par :

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$N_{i,p} = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.3)$$

Cette définition confère aux fonctions de bases leur caractère local puisque celles-ci sont non-nulles uniquement sur l'intervalle  $[u_i, u_{i+p+1}]$ . Ces fonctions de base sont alors représentées sur la figure 2.1 dans le cas où le degré choisi est 3 et pour 6 points de contrôle, cette figure nous permettant de vérifier le caractère local de telles fonctions.

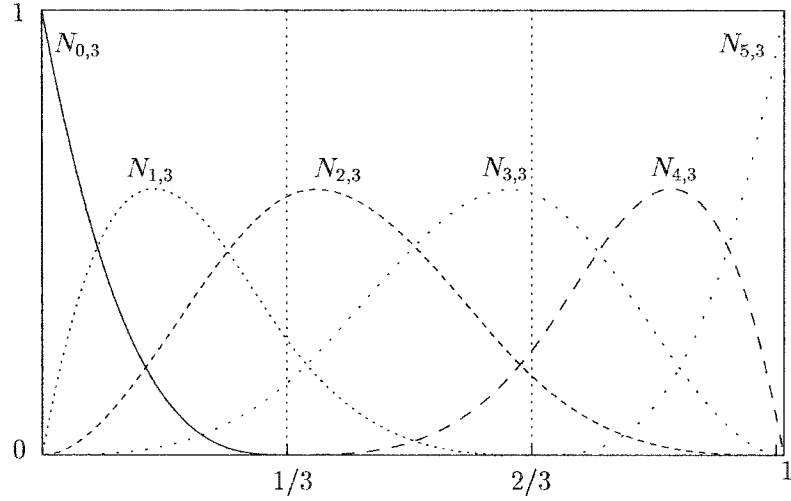


Figure 2.1 Fonctions de base de degré 3,  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$

En ce qui concerne le vecteur nodal, ce dernier est généralement exprimé sous la forme :

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$$

où les paramètres  $a$  et  $b$  représentent les bornes de l'intervalle dans lequel varie le paramètre de parcours  $u$  et dont les valeurs sont généralement fixées à 0 et 1 respectivement. Notons que lorsque les noeuds sont également espacés dans l'intervalle de parcours, ce vecteur est dit uniforme.

Il est également possible de constater que le degré  $p$  de ces fonctions de base joue un rôle particulièrement important dans l'allure que peut prendre la courbe. En règle générale, plus le degré de ces fonctions est faible, plus la courbe est «proche» de son polygone de contrôle (voir figure 2.2), et plus l'influence d'un point sur cette courbe est locale. Ceci peut s'expliquer intuitivement puisque plus l'ordre est faible, moins il y aura de points de contrôle qui contribueront au positionnement de la courbe en un endroit donné. Le cas qu'on peut considérer comme extrême est le cas de l'utilisation de fonctions de base de degré 1 où la courbe est en tout point le résultat d'une interpolation linéaire entre deux points de contrôle (la courbe correspond alors au polygone de contrôle).

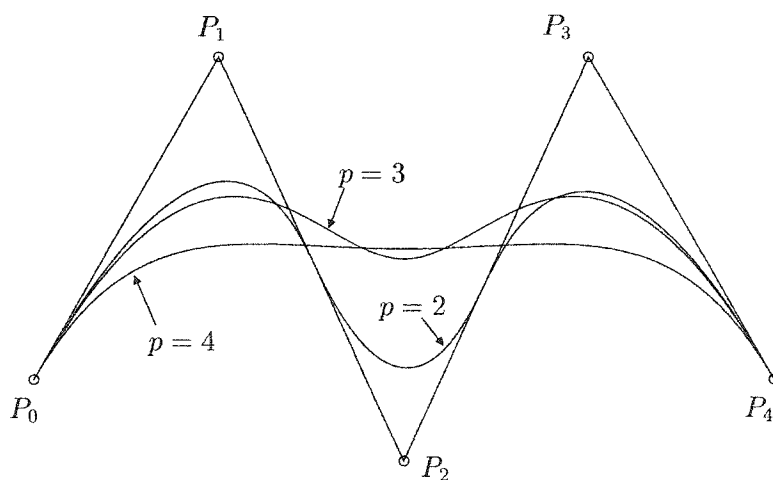


Figure 2.2 Influence de l'ordre des fonctions de base

### 2.2.2 Propriétés

Afin de mieux discerner les diverses particularités que peuvent présenter les NURBS, reprenons la relation de définition des NURBS (équation 2.1) à partir de laquelle la courbe est construite et réécrivons-la sous la forme :

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad (2.4)$$

où

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)\omega_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)\omega_i}$$

sont les fonctions de base rationnelles.

La définition même des fonctions de base confère aux NURBS des propriétés remarquables :

- si on considère que les poids  $\omega_i$  sont positifs pour tout  $i$ , alors on a  $R_{i,p}(u) \geq 0$  pour tout  $i$ ,  $p$ , et  $u \in [0, 1]$
- la somme des fonctions de base rationnelles est égale à 1 pour tout  $u \in [0, 1]$
- $R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$  : la courbe a pour extrémités les premier et dernier points du polygone de contrôle ( $\mathbf{C}(0) = \mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{P}_n$ )
- la courbe est tangente au premier et au dernier segment du polygone de contrôle
- si tout les poids sont unitaires, alors la NURBS est une B-spline
- $\mathbf{C}(u)$  est indéfiniment dérivable sur chaque intervalle situé entre deux noeuds et est  $p - k$  fois dérivable en un noeud de multiplicité  $k$  (la multiplicité d'un noeud étant le nombre de fois que ce noeud est répété dans le vecteur nodal). Par exemple, pour une NURBS cubique n'ayant que des noeuds de multiplicité un, la courbe est  $C^\infty$  entre deux noeuds et  $C^2$  aux noeuds
- pour une valeur donnée du paramètre de parcours (différente de celle d'un noeud),

- il n'y a au maximum que  $p + 1$  fonctions de base non-nulles ; dans le cas où ce point correspond à un noeud, ce nombre se réduit à  $p$
- le domaine d'influence d'un point  $\mathbf{P}_i$  est limité à la portion de courbe  $\mathbf{C}(u)$  telle que  $u \in [u_i, u_{i+p+1}]$  ; ainsi, si on modifie la position de ce point ou le poids  $\omega_i$  associé, seule la portion de courbe correspondant à cet intervalle sera affectée.

Il est à noter qu'un grand nombre de ces propriétés dépendent souvent de l'ordre des fonctions de base que l'on utilise pour construire la NURBS. Il est donc nécessaire à ce stade de déterminer l'ordre de la NURBS qu'on désire construire, et ceci en fonction bien entendu des propriétés attendues de la courbe. Le plus souvent, on cherche à obtenir une courbe qui soit évidemment continue, et dont la dérivée et la courbure le soient également, et ceci en tout point du profil. Or nous avons vu qu'une NURBS était  $C^\infty$  dans tout intervalle strictement inclus entre deux noeuds du vecteur nodal, et  $C^{p-k}$  au niveau des noeuds du vecteur nodal (où  $p$  est le degré des fonctions de base et  $k$  la multiplicité des noeuds). Comme les noeuds du vecteur nodal sont le plus souvent choisis avec une multiplicité d'ordre un, on voit donc qu'il est nécessaire de choisir une NURBS d'ordre au minimum égal à quatre (c'est-à-dire une NURBS cubique). C'est donc vers des fonctions de base cubique construites à partir d'un vecteur nodal ne comprenant que des noeuds de multiplicité un que nous nous sommes orientés par la suite, celles-ci permettant en effet de respecter les diverses contraintes de continuité tout en couvrant un espace de design suffisamment étendu.

### Remarque : Interprétation barycentrique

Pour une valeur donnée  $u_0 \in [0, 1]$  du paramètre de parcours, on peut écrire la relation (2.1) sous la forme :

$$\mathbf{C}(u_0) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=0}^n \alpha_i} \quad (2.5)$$

en ayant posé :

$$\alpha_i = N_{i,p}(u_0) \omega_i \quad \text{avec } \alpha_i \geq 0 \text{ pour tout } i$$

En outre, si on considère que  $u_0 \in [u_k, u_{k+1}]$ , alors il n'y a au maximum que  $p + 1$  fonctions de base non-nulles  $N_{k-p,p}(u_0), \dots, N_{k,p}(u_0)$ . Il en va donc de même pour les coefficients  $\alpha_i$  définis précédemment. Par définition, tous les coefficients  $\alpha_i$  seront nuls sauf  $\alpha_{k-p}, \dots, \alpha_k$  (certains de ces derniers pouvant toutefois s'annuler pour quelques cas particuliers). La relation (2.5) peut donc se réécrire comme suit :

$$\mathbf{C}(u_0) = \frac{\sum_{i=k-p}^k \alpha_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=k-p}^k \alpha_i}$$

On remarque que le point de la courbe correspondant au paramètre de parcours  $u_0 \in [u_k, u_{k+1}]$  n'est autre qu'un barycentre des points  $\mathbf{P}_{k-p}, \dots, \mathbf{P}_k$ . Par exemple, si on considère une NURBS cubique, chaque portion de courbe située entre deux noeuds est localisée à l'intérieur d'un quadrilatère formé par les points de contrôle

correspondants (voir figure 2.3).

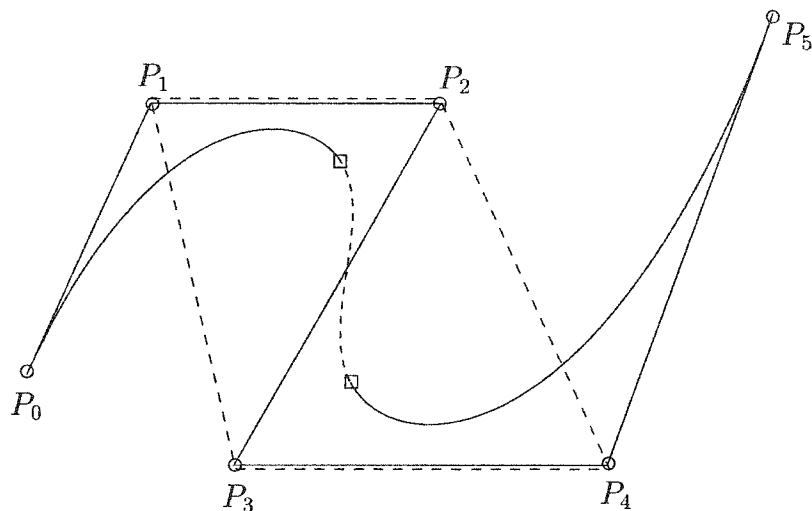


Figure 2.3 Propriété de l'enveloppe convexe pour une NURBS cubique

Bien qu'anodine en apparence, cette interprétation barycentrique permet d'avoir une vision différente de la structure de fond des NURBS, et offre ainsi la possibilité d'exploiter certaines propriétés géométriques de cet outil à partir de considérations simples émanant de la présence de ce barycentre en tout point de la courbe.

## 2.3 Application de contraintes géométriques

### 2.3.1 Pourquoi imposer des contraintes

Comme nous l'avons dit précédemment, le recours à un processus d'optimisation lors d'un projet de réhabilitation impose des contraintes géométriques. Il peut ainsi s'avérer utile d'introduire certaines contraintes de façon implicite afin de pouvoir en tenir compte sans avoir à les vérifier au cours de l'optimisation par l'intermédiaire d'une fonction contrainte supplémentaire, contribuant ainsi à simplifier le problème d'optimisation. Nous entendons ici par contraintes implicites des contraintes respectées automatiquement grâce à la paramétrisation, par opposition aux contraintes explicites qu'il est nécessaire de calculer par l'intermédiaire d'un programme indépendant, et qui ne seront pas forcément respectées.

Ainsi, il est souvent nécessaire, pour limiter les coûts, de s'intéresser à la modification d'une portion pré-définie du profil (par exemple le bord d'attaque ou le bord de fuite), le reste du profil demeurant inchangé. En outre, l'utilisateur peut désirer imposer l'épaisseur du profil à des endroits précis. L'ensemble de ces besoins présuppose donc que la paramétrisation puisse permettre la construction d'un profil ayant de bonnes propriétés de continuité, dont certaines parties correspondent au profil initial, et passant toujours par certains points définis initialement. Ceci revient à limiter le domaine d'influence d'un point de contrôle d'une NURBS (nous avons vu que celui-ci pouvait être plus ou moins grand selon l'ordre choisi), et à contraindre la courbe à passer par ces points fixes sans pour autant que son degré de continuité ou son caractère global en pâtisse. Ceci réduit en partie le risque de génération de profils irréalistes.



Nous allons donc voir que, moyennant quelques modifications, la paramétrisation NURBS permet de tenir compte d'une partie de ces contraintes. Ceci nous garantit un constant respect de certains objectifs fixés pour la réhabilitation, et ce quel que soit le vecteur de design considéré (ce vecteur de design correspondant en effet aux points de contrôle de la NURBS).

### 2.3.2 Construction

#### 2.3.2.1 Imposition d'un point fixe

Le problème de l'imposition d'un point par lequel la NURBS que l'on se propose de construire devrait obligatoirement passer peut être résolu grâce à certaines propriétés particulières des NURBS évoquées précédemment (en particulier celle de support local des fonctions de base). Nous avons déjà constaté que les fonctions de base avaient un support local et qu'un point donné de la courbe était déterminé seulement par une partie des points de contrôle. L'interprétation barycentrique de cette propriété de support local met en évidence le fait que la position d'un point donné de la courbe est obtenue à partir de celle de  $p + 1$  points de contrôle si ce point ne correspond pas à un noeud du vecteur nodal, et de celle de  $p$  points de contrôle dans le cas contraire. Par exemple, dans le cas d'une NURBS cubique, chaque point de la courbe est le barycentre de quatre points de contrôle entre deux noeuds du vecteur nodal. De plus les points correspondant aux noeuds du vecteur nodal sont, quant à eux, les barycentres d'uniquement trois points de contrôle. Ceci peut être vérifié en remarquant que sur la figure 2.1, il n'y a que trois fonctions de base qui sont non-nulles au niveau de chacun des noeuds de la NURBS cubique.

On en déduit donc qu'un moyen de fixer un point par lequel passera systématiquement la courbe est de faire correspondre au point fixe un noeud du vecteur

nodal et de fixer (ou du moins de relier entre eux par une relation donnée) les trois points de contrôle correspondant aux trois fonctions de base non-nulles. En effet, le vecteur nodal étant invariant au cours de l'optimisation, il en est de même pour les fonctions de base. Ceci garantit l'invariance du point fixe en imposant certaines conditions sur les trois points de contrôle concernés. Par exemple, faisons correspondre à un point fixe donné  $\mathbf{P}_f$  un noeud du vecteur nodal  $u_k$ . En ce point du vecteur nodal, seules trois fonctions de base sont non-nulles (on reste toujours dans le cas d'une NURBS cubique donc  $p = 3$ ) :  $N_{k-3,3}(u_k)$ ,  $N_{k-2,3}(u_k)$ ,  $N_{k-1,3}(u_k)$ . Les trois points de contrôle correspondant sont alors liés entre eux par une relation garantissant le fait que la courbe passera toujours par le point fixe :

$$\mathbf{C}(u_k) = \mathbf{P}_f = \frac{\sum_{i=k-3}^{k-1} N_{i,3}(u_k) \omega_i \mathbf{P}_i}{\sum_{i=k-3}^{k-1} N_{i,3}(u_k) \omega_i} \quad (2.6)$$

Cette relation vectorielle correspond en fait à deux relations scalaires si on travaille dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi, étant donné que l'on dispose initialement de neuf degrés de libertés pour les trois points concernés (c'est-à-dire des coordonnées  $x$  et  $y$  et du poids  $\omega$  pour chaque point), il reste en théorie sept degrés de liberté disponible pour placer les trois points en satisfaisant la contrainte du point fixe. Toutefois, afin de pouvoir résoudre un système linéaire (le système (2.6) étant non-linéaire), il peut s'avérer utile de fixer les poids des points de contrôle, ce qui réduit à quatre le nombre final de degré de libertés. En résumé, afin de garantir l'existence du point fixe, il suffit de fixer le poids des trois points (par exemple à un) et de les positionner de sorte que leurs coordonnées vérifient le système (2.6) dans ce cas linéaire. Ceci revient à choisir pour chaque type de coordonnée (abscisse et ordonnée dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ ) deux valeurs parmi les trois disponibles, et de calculer la coordonnée restante grâce au système d'équations obtenu à partir de la relation (2.6).

Ceci est illustré sur la figure 2.4 où l'on peut vérifier que l'imposition de deux relations sur les coordonnées  $x$  et  $y$  des trois points de contrôle ( $P_2, P_3, P_4$ ) fixe bien la position du point  $P_f$ , et ce même si l'on déplace ces points.

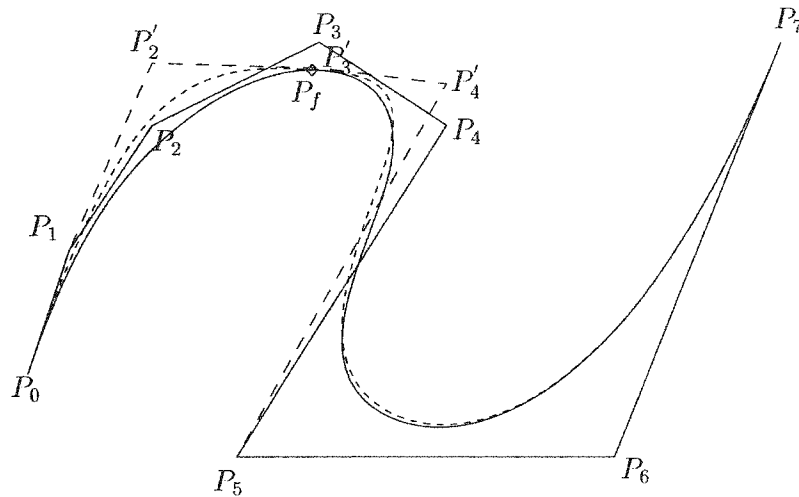


Figure 2.4 Déplacement des points de contrôle avec imposition d'un point fixe

En outre, nous avons évoqué précédemment le besoin fréquent de modifier, au cours de l'optimisation, uniquement certaines parties du profil, c'est-à-dire de diviser celui-ci en différentes zones, certaines demeurant invariantes et d'autres étant modifiées tout au long du processus de design. Il est alors nécessaire que chacune de ces parties ait des propriétés géométriques conformes aux exigences fixées initialement (c'est-à-dire que la courbe soit  $C^2$  sur tout l'intervalle). Le profil doit en outre respecter ces exigences en tout point, ce qui nécessite d'assurer le même degré de continuité au niveau des frontières entre les différents domaines. Enfin, la modélisation d'un tel profil (ou d'une famille de profils) doit être effectuée non seulement dans le but de minimiser le nombre de variable de design mais également dans le but de générer des profils ayant un aspect régulier (c'est-à-dire dépourvus de phénomènes localisés pouvant conduire à des profils irréalistes).

La modélisation géométrique à l'aide d'une seule NURBS capable de couvrir un espace de design suffisamment étendu tout en respectant l'invariance de certains points ou parties du profil initial permet de répondre à une partie de ces besoins de façon implicite. Cette construction est basée sur le fait que bien que chacun des points de contrôle ait un domaine d'influence étendu (ce qui garantit l'absence de phénomènes locaux), celui-ci ne couvre pas l'ensemble de l'intervalle sur lequel est défini la NURBS.

Ainsi, nous avons vu que, dans le cas d'une NURBS cubique, le domaine d'influence d'un point de contrôle  $\mathbf{P}_i$  est limité à l'intervalle  $u \in [u_i, u_{i+4}]$ . Si on considère la figure 2.5, qui représente les fonctions de base de la NURBS représentée précédemment sur la figure 2.4, il est possible de visualiser l'étendue du domaine d'influence d'un point de contrôle donné ainsi que celle des points de ce polygone de contrôle qui régissent les propriétés de la NURBS au niveau du point fixe  $\mathbf{P}_f$  évoqué précédemment (ce dernier correspondant au noeud  $u_5$  du vecteur nodal).

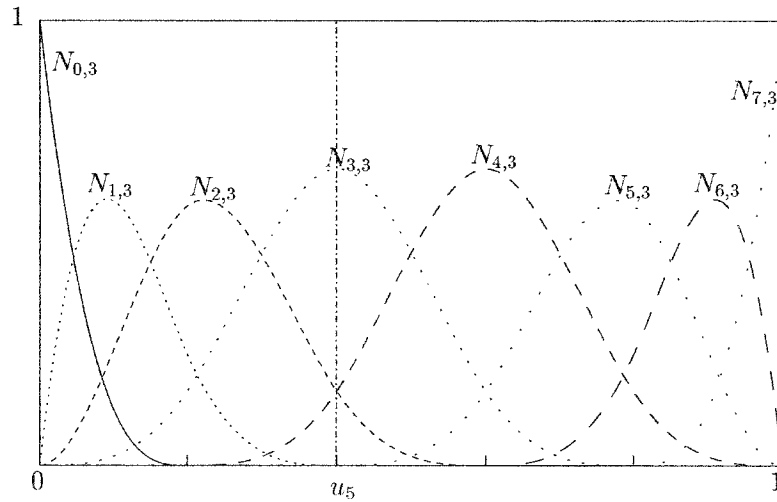


Figure 2.5 Fonctions de base pour une NURBS cubique à huit points de contrôle

Il est important de remarquer que si on «fige» les trois points de contrôle qui permettent d'obtenir la courbe au niveau du point fixe (ceux-ci correspondant aux trois fonctions de base non-nulles), la NURBS est «séparée» en deux parties indépendantes (en amont et en aval du noeud  $u_5$ ), puisque le fait de déplacer un ou plusieurs points de contrôle dans une de ces parties n'affectera pas l'autre partie (les fonctions de base  $y$  étant nulles).

Ceci est illustré sur la figure 2.6 où l'on peut vérifier l'existence d'une partie invariante de la NURBS à conditions de fixer trois points de contrôle.

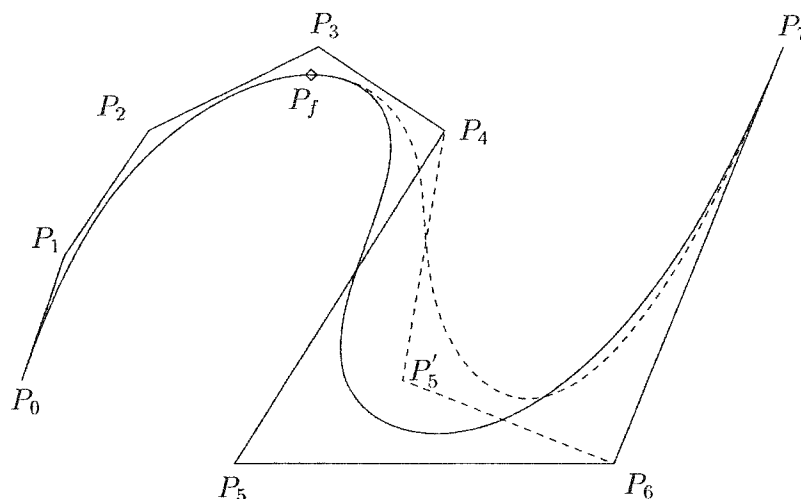


Figure 2.6 Effets du déplacement d'un point de contrôle

Outre le fait de fixer une partie de la courbe tout en assurant une continuité de type  $C^2$  sur l'ensemble du domaine, l'imposition d'un point fixe telle que décrite précédemment permet également de contrôler en ce même point les dérivées d'ordre 1 et 2 de la courbe par l'intermédiaire des mêmes trois points de contrôle.

Afin de vérifier et préciser cette affirmation, revenons à la définition d'une NURBS pour déterminer l'expression générale de ses différentes dérivées. L'expression gé-

générale des NURBS (voir équation 2.1) peut également s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{C}(u) = \frac{\omega(u)\mathbf{C}(u)}{\omega(u)} = \frac{\mathbf{A}(u)}{\omega(u)} \quad (2.7)$$

en ayant posé :

$$\omega(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \omega_i \mathbf{P}_i = \omega(u)\mathbf{C}(u) \quad (2.8)$$

L'expression générale de la dérivée d'ordre  $k$  ( $k \leq p-1$ ) de la fonction  $\mathbf{A}(u)$  s'obtient en utilisant la formule de Leibniz (dérivée d'ordre  $k$  d'une fonction pouvant être écrite comme le produit de deux fonctions dérivables), la fonction étant dérivable à l'ordre  $p-1$  sur l'ensemble du domaine si le vecteur nodal ne comprend que des noeuds de multiplicité égale à un, tout comme  $\omega(u)$  et  $\mathbf{C}(u)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(k)}(u) &= (\omega(u)\mathbf{C}(u))^{(k)} = \sum_{i=0}^k C_k^i \omega^{(i)}(u) \mathbf{C}^{(k-i)}(u) \\ &= \omega(u) \mathbf{C}^{(k)}(u) + \sum_{i=1}^k C_k^i \omega^{(i)}(u) \mathbf{C}^{(k-i)}(u) \end{aligned}$$

où  $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$  sont les combinaisons de  $i$  dans  $k$ .

On peut alors en déduire :

$$\mathbf{C}^{(k)}(u) = \frac{\mathbf{A}^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k C_k^i \omega^{(i)}(u) \mathbf{C}^{(k-i)}(u)}{\omega(u)} \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) nous permet donc d'obtenir la dérivée  $k$ ème de  $\mathbf{C}(u)$  connaissant

la dérivée  $k$ ième de  $A(u)$  (qui est généralement plus simple à calculer) et toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $k - 1$  des fonctions  $C(u)$  et  $\omega(u)$  (définition par récurrence).

Ainsi, si on considère les dérivées d'ordre un et deux, on obtient :

$$C'(u) = \frac{A'(u) - \omega'(u) C(u)}{\omega(u)} \quad (2.10)$$

$$C''(u) = \frac{A''(u) - 2\omega'(u) C'(u) - \omega''(u) C(u)}{\omega(u)} \quad (2.11)$$

En outre, les dérivées d'ordre un et deux des fonctions de base peuvent également être calculées en tout point de l'intervalle (les fonctions de base sont elles aussi dérivables à l'ordre  $p - 1$  si les noeuds sont toujours de multiplicité un) grâce à une relation de récurrence, dont la démonstration quelque peu fastidieuse peut être retrouvée dans (Piegl et Tiller (1995)), qui s'écrit sous la forme :

$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p}{p-k} \left( \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}^{(k)} + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{(k)} \right) \quad k = 0, \dots, p-1 \quad (2.12)$$

Donc, connaissant les dérivées d'ordre  $k$  des fonctions  $N_{i,p-1}$  et  $N_{i+1,p-1}$ , il est possible d'obtenir la dérivée  $k$ ième de  $N_{i,p}$  quel que soit le paramètre de parcours. La programmation d'algorithmes s'appuyant sur cette relation de récurrence nous a permis de tracer les dérivées d'ordre un et deux des fonctions de base de la figure 2.5. Elles sont alors représentées sur les figures 2.7 et 2.8.

Au regard des figures 2.7 et 2.8, nous pouvons vérifier qu'au niveau de chaque noeud

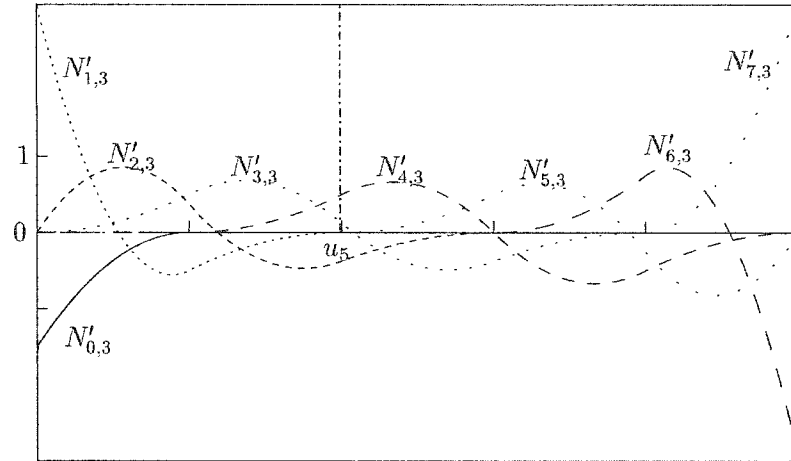


Figure 2.7 Dérivées d'ordre 1 des fonctions de base pour une NURBS cubique à huit points de contrôle

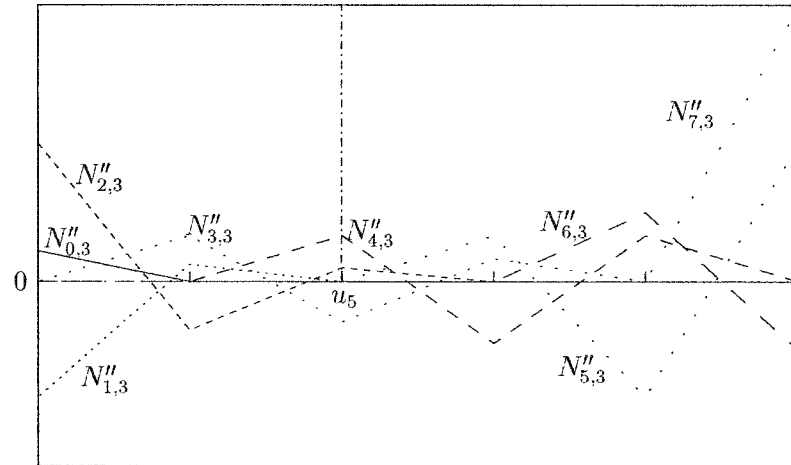


Figure 2.8 Dérivées d'ordre 2 des fonctions de base pour une NURBS cubique à huit points de contrôle

du vecteur nodal, il n'y a à chaque fois que trois fonctions de base non-nulles, et ceci pour les fonctions d'ordre zéro, un ou deux (ces fonctions correspondant toujours aux mêmes points du polygone de contrôle). Ainsi, les relations (2.10) et (2.11) démontrent que les trois points de contrôle qui déterminaient à eux seuls la position du point fixe sont également les seuls à exercer une influence sur les dérivées d'ordre un et deux au niveau de ce même point. Ceci signifie donc que



les trois points de contrôle qui permettent de positionner un point donné de la courbe et d'assurer son invariance au cours de l'optimisation offrent également la possibilité de contrôler à eux seuls les valeurs des dérivées premières et secondes en ce même point.

Nous avons ainsi pu constater que l'imposition d'un point fixe par l'utilisation des trois points de contrôle correspondant permettait non seulement de contrôler sa position mais également la valeurs des dérivées d'ordre un et deux. En outre, comme on l'a dit précédemment, l'introduction d'un point fixe donne la possibilité de délimiter des zones d'influences précises tout en assurant de bonnes propriétés de continuité entre chacune de ces zones.

Nous avons donc appliqué les principes évoqués précédemment afin d'établir une procédure de paramétrisation, s'appliquant à la grande majorité des profils hydrodynamiques ou aérodynamiques, à l'aide d'une seule NURBS qui respecte, par sa construction, un certain nombre de contraintes que l'on peut être amenés à rencontrer lors d'un processus d'optimisation.

### 2.3.2.2 Application

La présente section a pour objectif d'illustrer la méthodologie de construction d'une NURBS cubique comportant plusieurs points fixes, et ceci à partir d'un profil typique représenté sur la figure 2.9 et connu sous la dénomination NACA 0012.

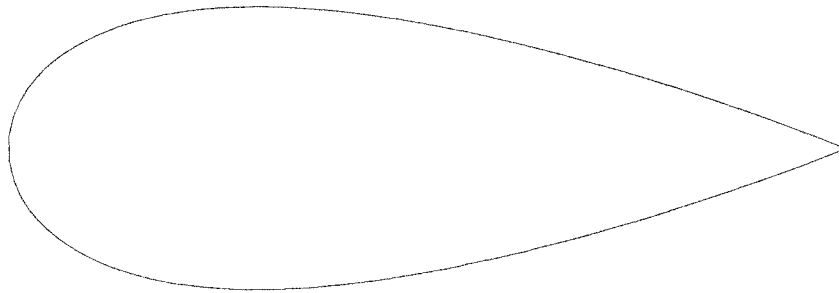


Figure 2.9 Profil NACA 0012

Nous nous proposons donc de paramétriser ce profil à l'aide d'une seule NURBS, en imposant quatre points fixes afin de non seulement séparer la courbe en plusieurs zones distinctes mais également afin d'imposer l'invariance au cours de l'optimisation de certaines portion du profil. La localisation des différents points fixes est présentée sur la figure 2.10. Il est alors possible de constater que ces points ont été positionnés de telle sorte que la région du bord d'attaque puisse éventuellement être modifié au cours de l'optimisation sans que cela n'affecte le reste de la courbe (à condition de maintenir les points de contrôle correspondants fixes).

La construction de la NURBS repose dans un premier temps sur la création d'une NURBS initiale dont les poids de chacun des points de contrôle ont arbitrairement été fixés à un (B-spline). Afin de créer cette B-spline, nous avons suivi en partie la méthode d'interpolation décrite dans l'annexe I. Pour ce faire, les points fixes ainsi que les extrémités du bord de fuite forment une partie des points de collocations,

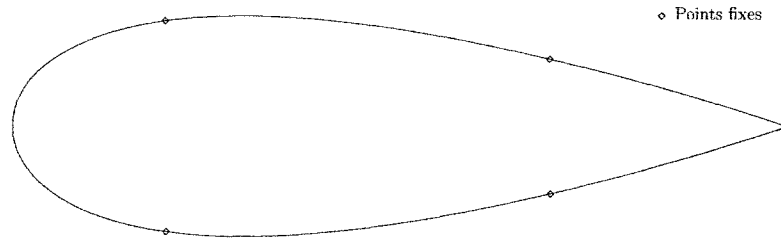


Figure 2.10 Positions des points fixes

les autres points de collocations étant répartis à l'intérieur de chaque segment selon une loi de concentration prenant en compte la courbure. L'imposition des points fixes requiert, quant à elle, l'insertion de noeuds dans le vecteur nodal (et donc de points de contrôle) de part et d'autre du noeud correspondant au point fixe, afin de définir les trois points de contrôle destinés à s'assurer de la conservation du point fixe. Les valeurs de ces deux derniers noeuds sont alors calculées en effectuant la moyenne entre le noeud correspondant au point fixe et le noeud précédent ou suivant selon le cas.

Faisons à ce point du raisonnement le bilan du nombre d'inconnues et du nombre d'équations dont on dispose au niveau du point fixe. Les poids des trois points de contrôle étant égaux à un, seuls les vecteurs position (coordonnées  $x$  et  $y$ ) de ces trois points sont inconnus, ce qui se résume à trois vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  inconnus. En revanche, nous disposons pour ce noeud  $u_k$  de la position du point fixe  $C(u_k)$ , et il est possible d'y évaluer le vecteur de la dérivée d'ordre un  $C'(u_k)$  ainsi que celui de la dérivée d'ordre deux  $C''(u_k)$ .

Notons par ailleurs, que dans le cas d'une B-spline, il est possible de simplifier le problème puisque l'équation de la courbe s'écrit simplement sous la forme (voir section 2.2.2) :

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad (2.13)$$

Ce qui permet d'écrire les dérivées d'ordre un et deux de la façon suivante :

$$\mathbf{C}'(u) = \sum_{i=0}^n N'_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad (2.14)$$

$$\mathbf{C}''(u) = \sum_{i=0}^n N''_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad (2.15)$$

Les relations exprimant les dérivées d'ordre zéro, un et deux s'expriment alors de la façon suivante :

$$\mathbf{C}(u_k) = \sum_{i=k-3}^{k-1} N_{i,p}(u_k) \mathbf{P}_i \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C}'(u_k) = \sum_{i=k-3}^{k-1} N'_{i,p}(u_k) \mathbf{P}_i \quad (2.17)$$

$$\mathbf{C}''(u_k) = \sum_{i=k-3}^{k-1} N''_{i,p}(u_k) \mathbf{P}_i \quad (2.18)$$

Nous pouvons alors constater que ces trois relations vectorielles forment un système linéaire de trois équations indépendantes à trois inconnues ( $\mathbf{P}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-2}, \mathbf{P}_{k-3}$ ) dans  $\mathbb{R}^2$ , ou de six équations à six inconnues (coordonnées  $x$  et  $y$  des trois points de contrôle). Les coordonnées des trois points de contrôle peuvent par conséquent être

déterminées par résolution de ce système.

Connaissant les valeurs des dérivées d'ordre un et deux en chacun des points fixes, ainsi que les coordonnées de chacun des points de collocation, il est donc possible de mettre en place un système linéaire inversible faisant appel à ces diverses données. Ce dernier est alors composé de  $n$  équations dans  $\mathbb{R}^2$  issues des  $n$  points de collocation comme dans le cas décrit en annexe I, et de  $2n_{ptf}$  (où  $n_{ptf}$  est le nombre de points fixes) équations dans  $\mathbb{R}^2$  obtenues grâce à l'évaluation des dérivées d'ordre un et deux en chacun des points fixes, pour autant de points de contrôle donc d'inconnues. A l'issue de la résolution de ce système linéaire, la courbe obtenue est donc une NURBS dont tous les poids des points de contrôle ont été fixés à un qui est en fait une approximation du profil par interpolation des points de collocation, et par imposition de la courbure et de la tangente en chacun des points fixes. Sur la figure 2.11, il est possible d'observer la courbe obtenue et de la comparer avec la courbe initiale afin de constater que cette approximation est très proche de la courbe initiale (l'erreur maximale est dans ce cas de l'ordre de  $10^{-4}$  pour une erreur moyenne de l'ordre de  $8 * 10^{-5}$ ).

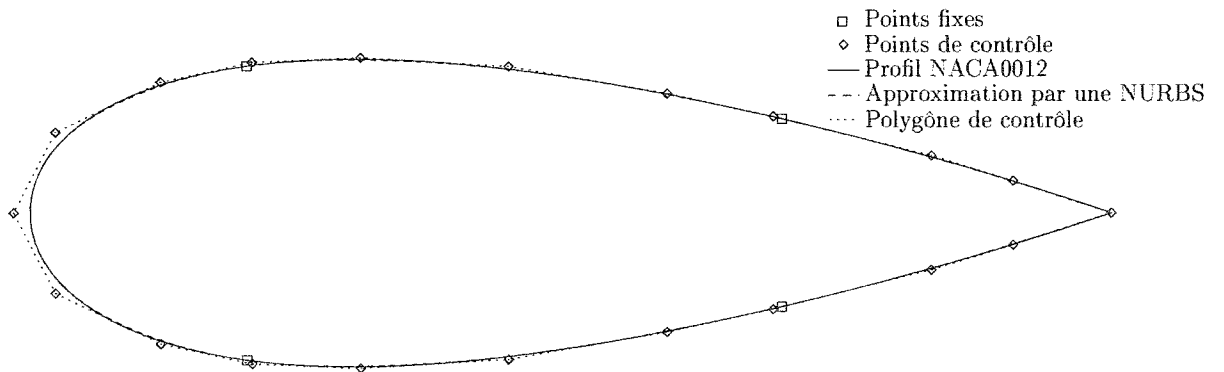


Figure 2.11 Approximation du profil NACA 0012 avec imposition de points fixes

Dans le cas où l'on souhaite maintenir certaines parties du profil invariantes au cours de l'optimisation, il peut s'avérer nécessaire de procéder à une optimisation géométrique locale (c'est-à-dire au niveau de ces parties invariantes) de la NURBS, les variables de design étant les coordonnées et les poids des points de contrôle régissant la courbe dans ces zones, afin que la NURBS puisse définir de façon très précise ces parties du profil. En revanche, si l'on souhaite modifier l'ensemble du profil (mis à part les points fixes), il n'est pas nécessaire de procéder à cette étape, la NURBS initiale étant amenée à être modifiée au cours du processus.

### 2.3.3 Vers une paramétrisation dite «hybride»

L'existence d'une relation directe et inversible (bijection) entre les coordonnées des trois points de contrôle qui définissent la courbe au niveau du point fixe et les dérivées d'ordre zéro (position du point fixe), un (vecteur tangent) et deux (courbure) en ce même point permet d'introduire des variables qui, bien que de nature différente, régissent toujours la même courbe. Le lien direct entre les trois points de contrôle et les valeurs des dérivées peut être écrit de façon simplifiée et linéaire dans le cas où les poids de ces points de contrôle ont été fixés à un :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}(u_k) \\ \mathbf{C}'(u_k) \\ \mathbf{C}''(u_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{k-3,p}(u_k) & N_{k-2,p}(u_k) & N_{k-1,p}(u_k) \\ N'_{k-3,p}(u_k) & N'_{k-2,p}(u_k) & N'_{k-1,p}(u_k) \\ N''_{k-3,p}(u_k) & N''_{k-2,p}(u_k) & N''_{k-1,p}(u_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k-3} \\ \mathbf{P}_{k-2} \\ \mathbf{P}_{k-1} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} C(u_k) \\ C'(u_k) \\ C''(u_k) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P_{k-3} \\ P_{k-2} \\ P_{k-1} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Étant donné que la matrice  $A$  est inversible, la relation 2.20 peut être inversée, ce qui permet d'obtenir les coordonnées des points de contrôle grâce à :

$$\begin{pmatrix} P_{k-3} \\ P_{k-2} \\ P_{k-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} C(u_k) \\ C'(u_k) \\ C''(u_k) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Cette correspondance directe au niveau des points fixes entre coordonnées des points de contrôle et dérivées en ces points permet ainsi d'établir une paramétrisation dite «hybride», puisque celle-ci ne ferait plus seulement intervenir les points de contrôle comme variables mais inclurait également les positions de certains points de la courbe ainsi que la tangente et la courbure en ces mêmes points.

Un exemple d'application au profil NACA0012 est présenté sur la figure 2.12. On voit ainsi que, outre les coordonnées et les poids des points de contrôle de la NURBS, cette courbe est régie par des points fixes permettant de définir comme variable l'épaisseur du profil en certaines abscisses, ou encore la tangente en certains points de ce profil.

Cette paramétrisation a pour principal avantage d'offrir à l'utilisateur la possibilité d'utiliser des variables plus explicites et ayant une signification géométrique directe (épaisseur du profil, tangente et courbure en certains points), tout en continuant

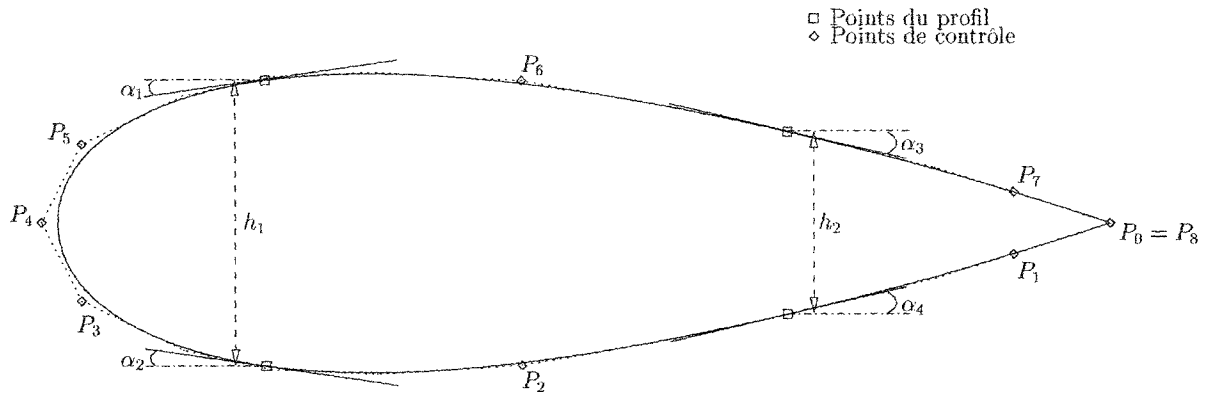


Figure 2.12 Paramétrisation hybride du profil NACA0012

d'exploiter les possibilités et propriétés des NURBS. L'utilisation de ces variables permet aussi d'exprimer certaines contraintes de façon explicite (épaisseur du profil, angle maximal du vecteur tangent en certains points, ...).



## CHAPITRE 3

### OPTIMISATION HYDRODYNAMIQUE

#### 3.1 Paramétrisation du profil d'avant directrice

Avant d'aborder la méthode de construction même de la courbe destinée à représenter le profil d'avant directrice, il est nécessaire de visualiser à nouveau le profil initial, les modifications que l'on désire y apporter et une partie des contraintes à respecter afin d'adapter au mieux la NURBS que l'on se propose de construire.

Un profil initial d'avant directrice (c'est-à-dire le profil déjà existant servant de point de départ au processus de réhabilitation) est présenté sur la figure 3.1.

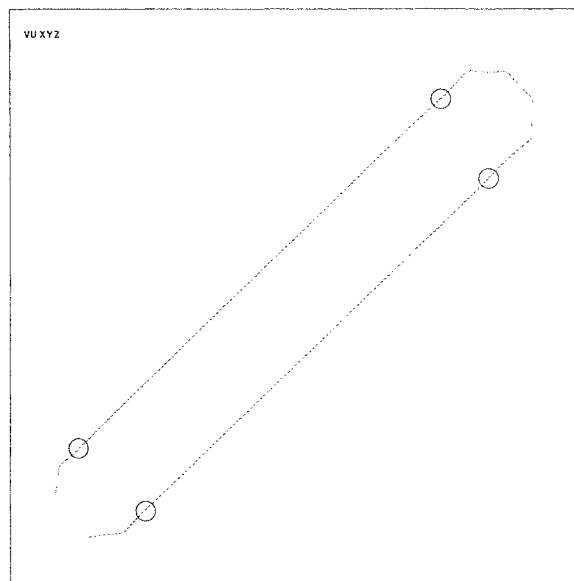


Figure 3.1 Profil initial d'une avant directrice

Il est à ce stade important de rappeler que pour des raisons économiques, seules les régions du bord d'attaque et du bord de fuite seront modifiées lors de la réhabilitation, ce qui contraint à imposer des zones d'invariance sur les flancs du profil. La figure précédente illustre donc cette contrainte : les cercles tracés correspondent aux frontières des différentes zones que l'on souhaite réaliser, certaines étant destinées à être modifiées (régions du bord d'attaque et bord de fuite) sans que cela n'affecte les zones que l'on souhaite laisser inchangées.

Une fois les points fixes et les diverses zones définis, il est alors possible de construire la NURBS en appliquant la méthode décrite dans le chapitre 2 et d'obtenir une paramétrisation du profil. La figure 3.2 présente le profil initial de l'avant-directrice et la courbe destinée à être utilisée comme point de départ de chacune des optimisations menées par la suite. Ce profil de départ a été obtenu en modifiant de façon empirique la courbe issue de l'interpolation de l'avant-directrice dans les régions du bord d'attaque et du bord de fuite. Cette NURBS comporte 5 points de contrôle définissant la région du bord d'attaque du profil, et 4 points de contrôle pour la zone du bord de fuite.

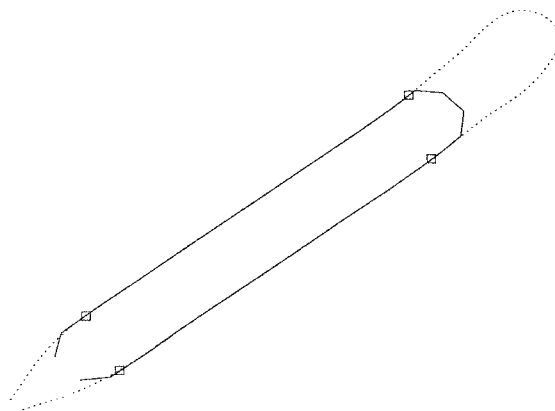


Figure 3.2 Profil initial pour l'optimisation

Dans un premier temps, nous avons choisi de nous concentrer sur l'optimisation de la région du bord d'attaque puisque cette zone a une influence majeure dans les performances et le comportement de l'avant-directrice. Ce choix porte donc à 15 le nombre de variables de design : les coordonnées  $(x, y)$  et les poids des 5 points de contrôle décrivant la courbe dans la région du bord d'attaque. La figure 3.3 présente les points de contrôle dont on a choisi de modifier les propriétés au cours de l'optimisation. On y présente également les intervalles dans lesquels varient chacun de ces points.

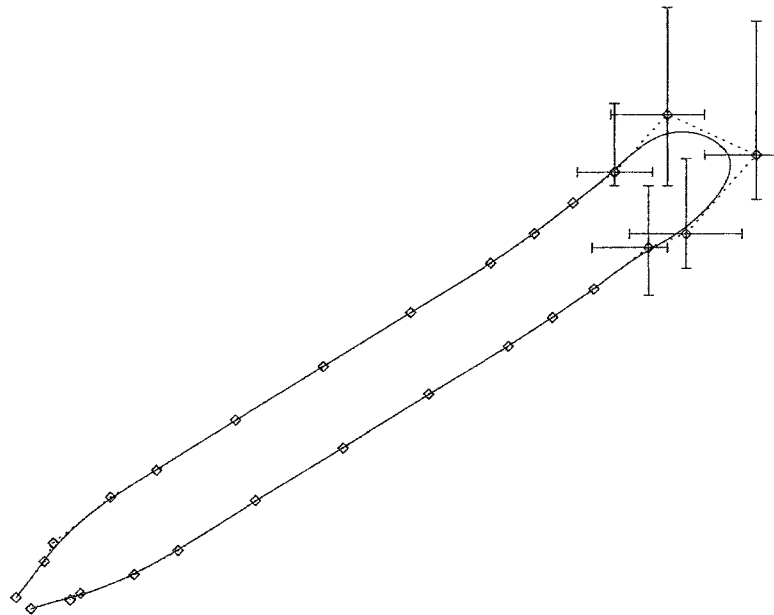


Figure 3.3 Variables de design

## 3.2 Chaîne de simulation 2D

Afin de mener à bien un processus d'optimisation, il est impératif d'être en mesure d'évaluer automatiquement pour une configuration du profil donnée (ou pour un vecteur de design ce qui est équivalent pour cette étude) la fonction objectif ainsi que les fonctions contraintes correspondantes. Ceci impose dans notre cas de pouvoir effectuer une analyse CFD de la configuration pour un ou plusieurs régimes de fonctionnement afin d'évaluer les performances atteintes, et de vérifier si les contraintes sont respectées.

### 3.2.1 Génération du maillage

Pour effectuer une telle simulation de l'écoulement, il est avant tout impératif de générer le maillage du domaine et du profil lui-même. Cette opération est divisée en deux étapes distinctes : la définition de la topologie du domaine et la génération du maillage.

Il est alors nécessaire de choisir quelle sorte de maillage on désire construire, ce type étant en grande partie déterminé par la nature de l'écoulement, à savoir incompressible et turbulent, et le code que l'on désire utiliser pour résoudre cet écoulement, chaque solveur n'acceptant en général qu'un seul type de maillage (structuré, non-structuré ou hybride). Pour des raisons données dans la section 3.2.2, nous avons choisi le logiciel commercial CFX-TASCflow comme logiciel d'analyse CFD, solveur qui nécessite la construction d'un maillage 3D structuré.

### 3.2.1.1 Définition du domaine et de la topologie du maillage

Rappelons que l'objectif de l'optimisation est de réduire les pertes énergétiques de la couronne avant-directrice, qui est composée d'une avant-directrice telle que décrite précédemment, répétée un certain nombre de fois par rotation par rapport à l'axe de la roue. Cette périodicité permet de réduire notre étude à la simulation d'une seule avant-directrice, les frontières du domaine étant alors périodiques, comme l'illustre la figure 3.4.

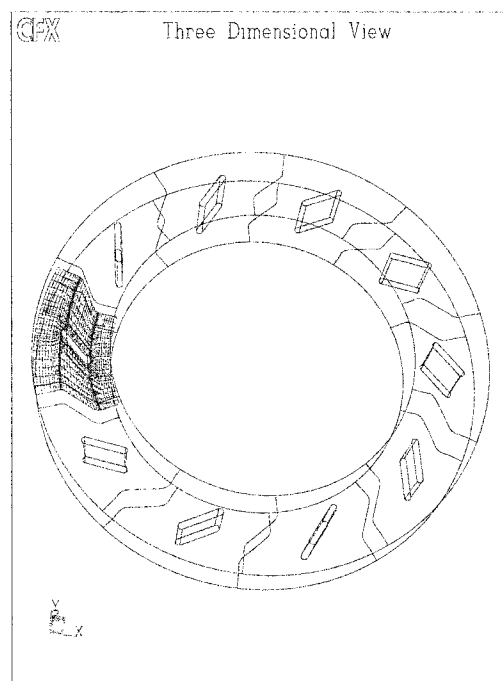


Figure 3.4 Illustration de la périodicité

En outre, étant donné que l'on désire procéder à une optimisation du profil en deux dimensions et que le solveur CFX-TASCflow effectue des simulations 3D uniquement, nous avons donc procédé à une extrusion du profil 2D dans la direction axiale afin de transformer le domaine 2D en un domaine 3D, l'analyse pouvant alors être qualifiée de quasi-2D.

La nécessité de construire un maillage structuré ainsi que la complexité du domaine à mailler conduisent à diviser le domaine en plusieurs zones pour mieux contrôler la répartition et l'aspect des mailles. La figure 3.5 illustre cette division de la topologie en 16 zones en représentant une coupe dans un plan orthogonal à la direction axiale du domaine de maillage.

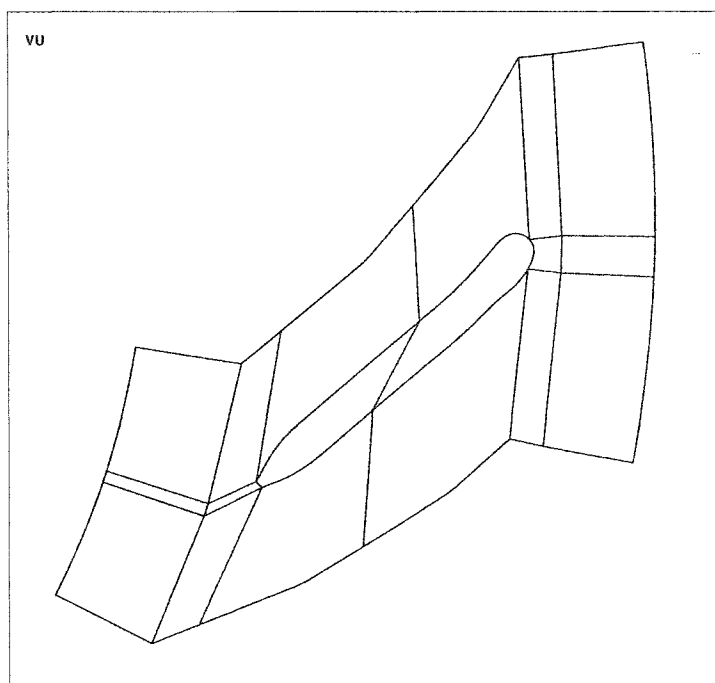


Figure 3.5 Topologie du domaine

La création d'une telle topologie est effectuée de manière automatique pour une très large gamme de profils différents, adaptant pour chacun d'eux la position des points d'ancrage des frontières des zones, ainsi que les profils des frontières périodiques en fonction de la courbe médiane de l'aube avant-directrice. Ce programme a été développé au sein du CERCA par Mohammed Khachan, en collaboration avec General Electric.

### 3.2.1.2 Construction du maillage

Une fois la topologie établie, il est possible de spécifier pour chaque zones le nombre de mailles et les lois de concentration le long des arêtes. Ce maillage est rappelons-le un maillage structuré multi-blocs qui respecte les contraintes de périodicité en ses frontières. Nous verrons dans la section 4.1 que le réglage du nombre d'éléments et de leur concentration requiert une attention particulière car il détermine la convergence et l'exactitude de la solution . La figure 3.6 représente un maillage typique obtenu à partir de la topologie présentée précédemment et d'une combinaison donnée des différents paramètres en présence. Il est également à noter qu'il comporte uniquement 2 éléments (3 noeuds) dans la direction perpendiculaire à la feuille, le problème étant quasi-2D. Ce maillage est également généré de façon automatique par un programme de maillage développé par l'équipe de génération de maillage du CERCA.

### 3.2.2 Résolution de l'écoulement quasi 2D

Le logiciel de simulation CFX-TASCflow est utilisé dans la résolution de nombreux problèmes similaires ((Tomas *et al.* (2002)), (Wherli *et al.* (1997)) et (Casey *et al.* (1996))), (Drtina et Sallaberger (1999)) ont en particulier confirmé la pertinence de son utilisation dans le cas des turbines hydrauliques. Ce logiciel, dont les bases théoriques ont été présentées par (Raw (1985)), permet de résoudre les équations de Reynolds 3D moyennées dans leur forme conservative sur des maillages multi-blocs. La discrétisation spatiale est obtenue à l'aide d'une méthode des volumes finis basée sur les éléments finis. Le système est résolu pour les variables primitives de l'écoulement (pression et composantes cartésiennes de la vitesse) en utilisant un couplage de la méthode algébrique «multigrid» avec un schéma de différenciation amont du second ordre corrigé. Les effets turbulents sont incorporés grâce au modèle

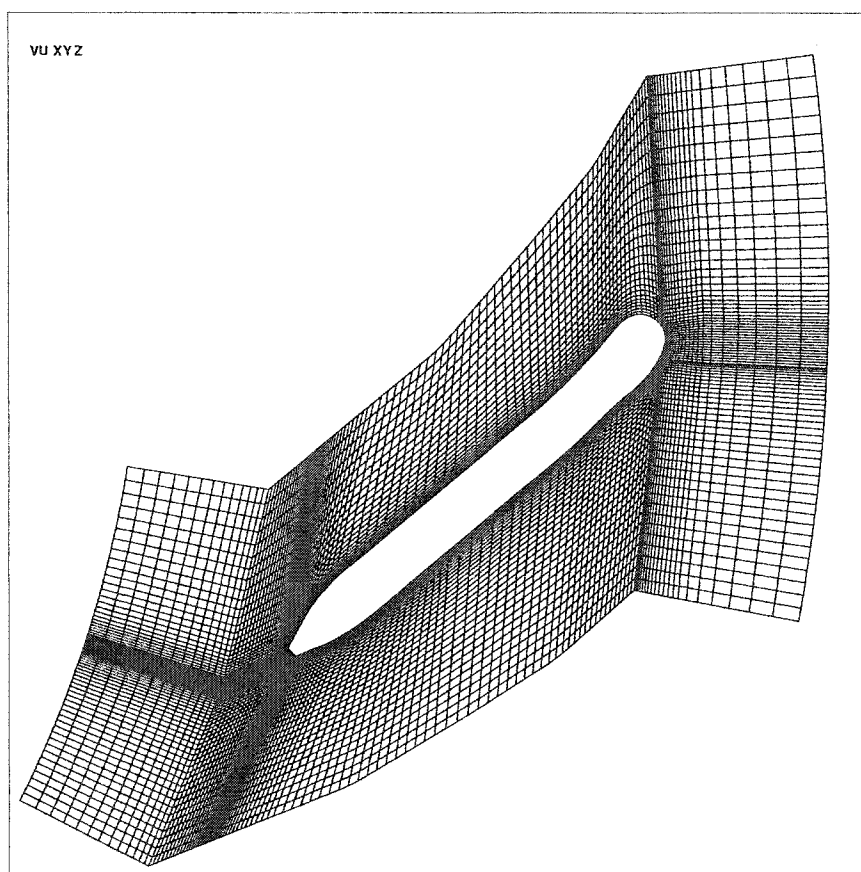


Figure 3.6 Coupe du maillage structuré



standard  $k-\epsilon$ .

Il est également utile de noter que ce logiciel offre la possibilité d'effectuer un calcul en prenant comme solution initiale la solution obtenue au cours d'un calcul précédent, ce qui donne lieu à des économies de temps dans le cas où les deux configurations sont proches.

### 3.2.3 Évaluation de la fonction objectif

Une fois l'écoulement résolu pour une configuration donnée, il reste à évaluer les pertes de charge grâce à un module auxiliaire de CFX-TASCflow. Rappelons ici que les pertes de charges représentent les pertes énergétiques engendrées par le profil et sont évaluées à l'aide de l'expression :

$$f(x) = \frac{P_{tot}^{amont} - P_{tot}^{aval}}{P_{tot}^{amont}}$$

Il nous faut donc évaluer les valeurs des pressions totales en amont et en aval du profil, ces valeurs étant en fait des valeurs moyennes. L'écoulement étant 3D, le calcul de la pression totale moyenne en un rayon donné est effectué en créant d'abord une surface résultant de l'intersection du domaine de calcul avec un cylindre de même rayon et dont l'axe est confondu avec celui de la turbine. On interpole ensuite sur des points de cette surface les valeurs des vitesses et de la pression connues aux noeuds. La valeur moyenne de la hauteur de charge pour ce rayon est alors obtenue en effectuant une moyenne sur cette surface des valeurs locales pondérées par le débit massique radial.

Une représentation des deux rayons sur lesquels on calcule la pression totale moyenne est donnée sur la figure 3.7 ci-dessous :

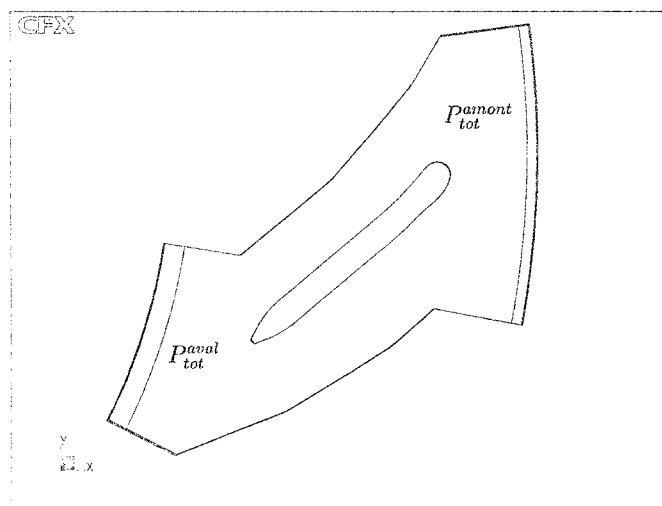


Figure 3.7 Rayons de calcul des pressions totales moyennes

La chaîne automatique d'évaluation des performances d'un profil dont chacun des composants a été décrit précédemment peut ainsi être résumée par la figure 3.8.

### 3.3 Définition des régimes d'écoulement

Une phase préliminaire importante lors de la mise en place d'une méthodologie d'optimisation est la définition des conditions de l'écoulement pour lesquelles on désire améliorer les performances de la géométrie étudiée. En effet, l'optimisation vise à répondre à un certain nombre d'exigences fournies dans un cahier des charges formulé par l'utilisateur du dispositif ou par le constructeur lui-même.

Nous avons donc dans un premier temps déterminé, en collaboration avec General Electric, les conditions d'utilisation de la turbine dans laquelle s'intègre la couronne avant-directrice, afin de fixer le débit total et le nombre de Reynolds de l'écoulement à l'entrée de la couronne. Il est important de préciser que les valeurs utilisées se

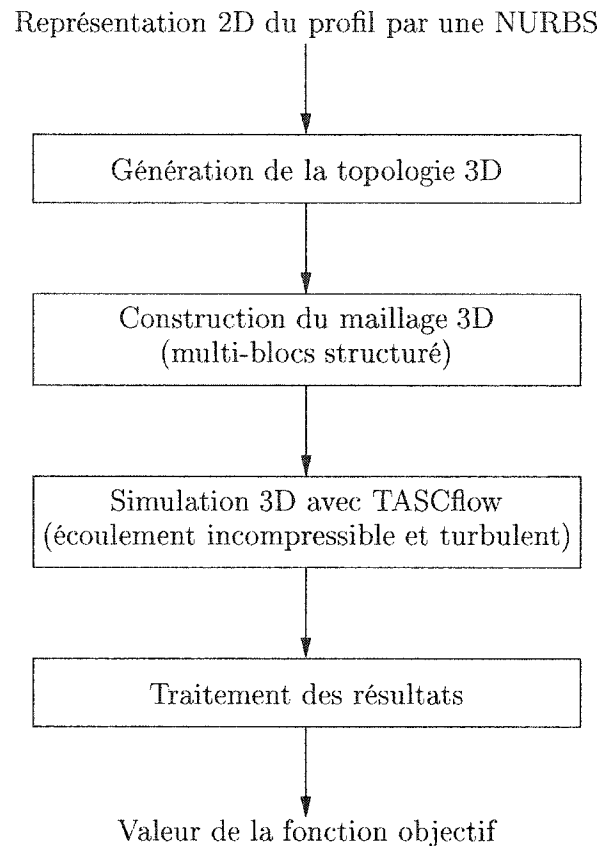


Figure 3.8 Chaîne d'évaluation de la fonction coût

situent dans la zone de rendement maximal de la turbine hydraulique, cette zone étant en général prioritaire autant pour le client que pour le constructeur.

L'annexe II représente la distribution des angles d'entrée et de sortie de l'écoulement pour cette région de fonctionnement au niveau de la couronne de distribution. On peut constater que pour un débit et une hauteur de charge donnés, l'angle d'entrée dans la couronne avant-directrice varie en fonction de la position angulaire, et de la position axiale en raison d'effets tridimensionnels. Notons que si l'on change de régime de fonctionnement de la turbine hydraulique (hauteur de charge ou débit), la distribution d'angle en entrée ne sera que très peu modifiée, et seul le nombre de Reynolds sera affecté.

Comme nous l'avons remarqué au cours du chapitre 1, la détermination des conditions en entrée utilisées afin de procéder à l'optimisation de l'aube est une opération de grande importance à la formulation du problème. Il nous faut donc analyser la répartition spatiale de l'angle d'entrée afin d'en déterminer les valeurs «clé» à utiliser dans l'évaluation des fonctions coût. Nous avons donc choisi à la lueur de cette distribution d'angle d'identifier les bornes de l'intervalle de variation de l'angle, et d'effectuer une discrétisation uniforme de cet intervalle pour obtenir les points recherchés. Ainsi, l'angle varie entre 15 et 30 degrés dans le plan médian et les plans parallèles. En outre, les effets 3D tendent à augmenter la valeur de cet angle à une position donnée. Nous avons de ce fait choisi d'identifier 4 valeurs d'angle différentes : 15, 20, 25 et 30 degrés. Il est également possible de constater que plusieurs régions se distinguent à la vue des courbes présentées :

- une première région correspondant à un angle  $\theta$  compris entre -100 et 0 degré
- une deuxième région pour  $\theta$  compris entre 0 et 120 degrés
- une dernière zone pour un angle supérieur à 120 degrés.

Il faut enfin préciser qu'il n'est pas nécessaire de modifier les aubes appartenant à la dernière région, les conditions en entrée étant moins sévères que pour les premières régions.

Nous avons donc opté pour une division des aubes à optimiser en deux groupes correspondant aux deux premières zones afin d'augmenter les gains apportés par l'optimisation. Par ailleurs, les trois premières valeurs de l'angle en entrée (20, 25 et 30 degrés) seront utilisées pour mener l'optimisation pour le premier groupe d'aubes, et les trois dernières (15, 20 et 25 degrés) pour le deuxième groupe.

En ce qui concerne le premier groupe, on peut constater que l'angle d'entrée varie entre 20 et 30 degrés, l'angle moyen étant proche de 25 degrés. On peut alors supposer que la distribution de l'angle d'entrée suit une loi de répartition ayant une allure similaire à une loi normale, ce qui nous amène à choisir une combinaison

des poids de la fonction coût multi-points du type «1-2-1» dans l'expression (1.2). La fonction objectif multi-points utilisée pour optimiser les aubes de cette première zone s'exprimera donc sous la forme :

$$F(x) = \left| \frac{f_{20}(x) - f_{20}^*}{f_{20}^{worst} - f_{20}^*} \right| + 2 \left| \frac{f_{25}(x) - f_{25}^*}{f_{25}^{worst} - f_{25}^*} \right| + \left| \frac{f_{30}(x) - f_{30}^*}{f_{30}^{worst} - f_{30}^*} \right| \quad (3.1)$$

où les indices 20, 25 et 30 correspondent aux différents angles d'écoulement utilisés pour évaluer les performances du profil. Il est important de préciser que le choix de ces coefficients est motivé par la distribution de l'angle fournie en annexe, mais également par l'expérience du partenaire industriel acquise tout au long des années sur de tels projets.

Pour ce qui est de la deuxième zone, on peut tout de suite constater que les amplitudes des variations de l'angle en entrée sont beaucoup plus importantes et que l'influence de la position du plan orthogonal à l'axe sur lequel on se situe est non-négligeable. Il nous faut donc choisir les poids pour chacun des régimes non seulement en fonction des variations selon la position angulaire, mais aussi selon la coordonnée axiale. Les conseils d'un ingénieur de General Electric ont conduit à une combinaison du type «1-2-1», ce qui nous permet d'écrire la fonction coût multi-points pour ce groupe de la façon suivante :

$$F(x) = \left| \frac{f_{15}(x) - f_{15}^*}{f_{15}^{worst} - f_{15}^*} \right| + 2 \left| \frac{f_{20}(x) - f_{20}^*}{f_{20}^{worst} - f_{20}^*} \right| + \left| \frac{f_{25}(x) - f_{25}^*}{f_{25}^{worst} - f_{25}^*} \right| \quad (3.2)$$

### 3.4 Application et optimisation

#### 3.4.1 Adimensionnalisation des variables et des fonctions

Afin d'améliorer le comportement de l'optimisation, il est avant tout important de procéder à une mise à l'échelle des variables, des fonctions coûts et des fonctions contraintes. En effet, le fait qu'une fonction soit d'un ordre de grandeur très différent de celui des autres fonctions peut conduire à une prépondérance de celle-ci sur les autres fonctions, ou au contraire à un impact artificiellement négligeable sur l'optimisation. Il est donc important que les fonctions objectifs et contraintes soient toutes mises à la même échelle, et ceci afin de s'assurer de ne pas introduire d'effets artificiels dus aux différences d'échelles.

En outre, si on utilise une méthode à gradients, il est important d'adimensionnaliser les variables de design. En effet, les diverses composantes du gradient doivent être du même ordre de grandeur, afin que l'optimiseur puisse tenir compte de l'influence de chacune des variables de façon convenable. Cette adimensionnalisation des variables de design peut s'effectuer en tenant compte des bornes de l'intervalle dans lequel chacune d'elles varient.

La transformation suivante présentée par (Papalambros et Wilde (2000)) garantit que la variable adimensionnelle  $\bar{x}_i$  prendra des valeurs comprises entre -1 et 1 lorsque  $x_i$  varie entre  $x_{min}$  et  $x_{max}$ .

$$\bar{x}_i = \frac{2}{x_{imax} - x_{imin}} x_i - \frac{x_{imax} + x_{imin}}{x_{imax} - x_{imin}}$$

La mise à l'échelle des variables et des fonctions coût est donc une phase délicate, car il s'agit ici de trouver une configuration valide pour une gamme de configurations

aussi étendue que possible, sans pour autant modifier la nature même du problème à résoudre.

### 3.4.2 Implémentation du processus dans un logiciel d'optimisation

Le logiciel commercial d'optimisation iSIGHT a été choisi pour mener cette optimisation en raison de sa polyvalence et de sa commodité d'utilisation. En effet, ce logiciel offre une gamme étendue de méthodes d'optimisations (aussi bien heuristiques qu'à gradients) qu'il est possible de changer en cours d'optimisation. En outre, cette implémentation s'effectue en un temps relativement limité et de façon intuitive, ce qui nous permet de concentrer notre attention sur la formulation du problème et sur les divers réglages à effectuer. La figure 3.9 illustre donc l'application du processus d'optimisation ainsi que le rôle du logiciel d'optimisation.

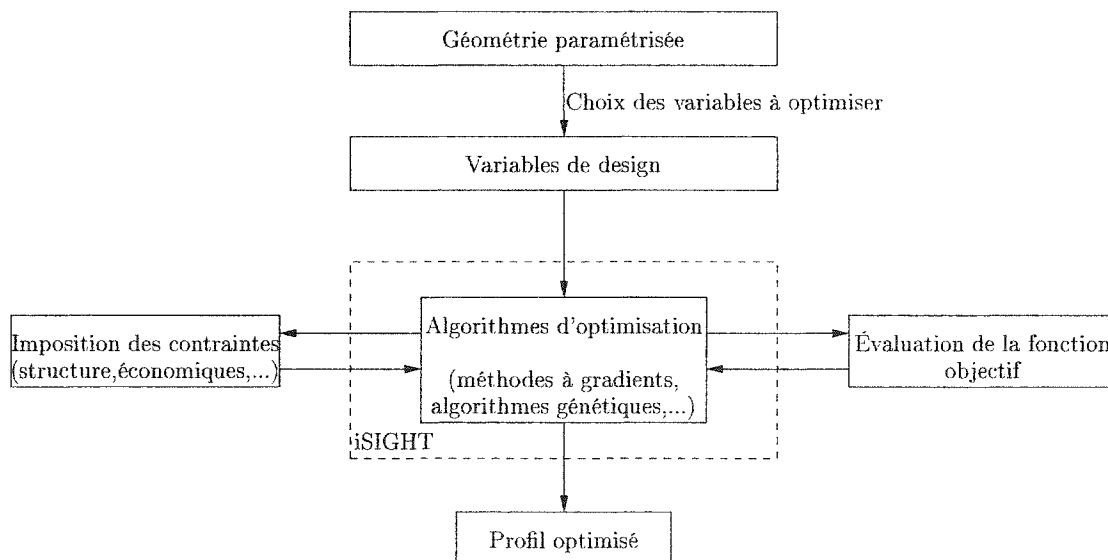


Figure 3.9 Processus d'optimisation

### 3.4.3 Algorithmes d'optimisation utilisés

Le logiciel iSIGHT offre une vaste gamme de méthodes classiques d'optimisation, qui peuvent être divisées en deux catégories principales : les méthodes dites globales et les méthodes locales. Au sein de ces méthodes locales se distingue la famille des algorithmes à gradients. Ces méthodes permettent de converger rapidement vers un optimum, ce dernier pouvant toutefois s'avérer être un optimum local. En revanche, les algorithmes génétiques, appartenant aux méthodes globales, permettent de par leur principe même d'explorer plus globalement l'espace de design, ce qui diminue les risques de converger vers un minimum local, mais à un coup nettement plus élevé.

Nous nous proposons donc d'effectuer une brève description des méthodes d'optimisation que nous avons choisi d'utiliser par la suite, la connaissance de ces algorithmes étant souvent nécessaire à leur bonne utilisation.

#### 3.4.3.1 Méthodes SQP

Il existe plusieurs types de méthodes à gradients capables de résoudre un problème d'optimisation comportant un certain nombre de contraintes : programmation séquentielle linéaire (SLP), méthode des centres, méthode des directions faisables, programmation séquentielle quadratique (SQP), etc. Il est important de remarquer que les trois premières méthodes utilisent une approximation linéaire de la fonction objectif afin d'obtenir une direction de descente, tandis que la dernière méthode utilise une approximation quadratique de la fonction coût, ce qui peut être avantageux dans le cadre de problèmes fortement non-linéaires.



Nous nous sommes donc orientés vers cette dernière classe de méthodes, le logiciel d'optimisation iSIGHT mettant à notre disposition deux algorithmes SQP : la méthode DONLP et NLPQL. Nous avons alors choisi d'utiliser l'algorithme DONLP étant donnée l'expertise déjà acquise par des chercheurs au CERCA.

L'algorithme DONLP, développé par (Spelluci (1998)), est une variante des méthodes SQP. Nous nous proposons donc ici de présenter les principes de ces méthodes ((Gould et Toint (1999))), les détails des modifications apportées dans DONLP étant fournis par (Spellucci (1999)). Les méthodes SQP visent à résoudre un problème comportant aussi bien des contraintes d'égalité que d'inégalité, et qui peut être formulé sous la forme :

$$\min_{x \in \Omega} f(x) \quad (3.3)$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0 \in \mathbb{R}^p, g(x) \geq 0 \in \mathbb{R}^m\} \quad (3.4)$$

où :

- $f, h, g$  sont respectivement les fonctions objectif, contraintes d'égalité et d'inégalité
- $p$  et  $m$  sont le nombre de contraintes d'égalité et d'inégalité
- $x$  est le vecteur de design et  $\Omega$  l'espace de design de dimension  $n$ .

Il s'agit ensuite d'établir une approximation quadratique de la fonction objectif et une approximation linéaire des fonctions contraintes, afin de convertir localement le problème non-linéaire en un problème de programmation quadratique qui se présente comme suit :

$$\min_{d \in S_k} \varphi(d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d \quad (3.5)$$

$$S_k = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla h(x) = 0 \in \mathbb{R}^p, g(x) \geq 0 \in \mathbb{R}^m\} \quad (3.6)$$

La matrice  $B_k$  est une matrice définie positive qui correspond initialement à la matrice identité et qui est mise à jour dans les itérations suivantes afin d'approcher la matrice Hessienne. Le vecteur  $d$  dont les composantes sont les variables de design représente quant à lui le vecteur direction de descente obtenu par la résolution du problème de programmation quadratique. Dès lors que ce problème a été résolu, le vecteur de design est mis à jour en cherchant, dans cette direction, le minimum d'une fonction mérite définie par :

$$\Phi(x) = f(x) - \sum_{i=1}^m \beta_i \min \{0, g_i(x)\} + \sum_{j=1}^p \gamma_j |h_j(x)| \quad (3.7)$$

où les coefficients  $\beta_i$  et  $\gamma_j$  sont également mis à jour à chaque itération. Lors de cette recherche unidimensionnelle, le vecteur de design est calculé grâce à :

$$x^{k+1} = x^k + \sigma_k d \quad (3.8)$$

Les modifications apportées dans l'algorithme DONLP portent en partie sur la résolution de ce problème de recherche unidimensionnelle afin d'obtenir la valeur du pas  $\sigma_k$  le long de la direction de descente. Une fois ce pas obtenu, on procède à la mise à jour de la matrice  $B_k$  selon un schéma propre à chacune des variantes de la méthode SQP. On procède ensuite à l'itération suivante.

Il est important de remarquer que l'écriture de la fonction mérite telle que présentée précédemment met en évidence l'importance de la mise à l'échelle des fonctions objectif et contraintes. Ceci justifie donc la nécessité de procéder à cette adimensionnalisation afin d'appliquer l'algorithme d'optimisation le plus efficacement possible.

### 3.4.3.2 Algorithmes génétiques

Les algorithmes génétiques ont fait l'objet de nombreux travaux au cours de cette dernière décennie ((Goldberg (1989); Gen et Cheng (1997); Koza (1992))) visant à appliquer les principes de la sélection naturelle et de la génétique à l'optimisation. Ces algorithmes ont été appliqués avec succès à de nombreux domaines, dont celui de l'aéronautique ((Chen *et al.* (2002); Oyama (2000); Zhang *et al.* (2001))) et des turbines hydrauliques ((Tomas *et al.* (2002); Sallaberger *et al.* (2001); Lipej et Poloni (2000))).

Le principe de ces algorithmes est de créer initialement et de façon aléatoire une population d'individus représentant des vecteurs de design, et d'appliquer trois opérations inspirées de mécanismes naturels (reproduction, croisement et mutation) afin de faire évoluer cette population :

**La reproduction** est le processus au cours duquel certains individus sont sélectionnés pour se reproduire. Les individus les plus «forts», c'est-à-dire ceux ayant les meilleures fonctions coûts, ont plus de chance d'être choisis pour se reproduire que les autres individus.

**Le croisement** permet aux individus d'une même population d'échanger de façon aléatoire certaines de leurs caractéristiques.

**La mutation** permet d'assurer la diversité des individus en modifiant de façon aléatoire les gènes d'un individu avec une certaine probabilité (généralement assez faible). Cette dernière opération est essentielle afin que la méthode ait de meilleures chances de converger vers un optimum global.

Ainsi, les fondements des algorithmes génétiques augmentent la probabilité de converger vers un optimum global ; cette recherche est cependant très coûteuse en terme d'évaluations de la fonction coût, et donc en terme de temps de calcul. En revanche, les algorithmes à gradients sont souvent plus efficaces dans leur recherche d'un optimum sans pour autant être en mesure de garantir que le point trouvé corresponde effectivement à un optimum global.

## CHAPITRE 4

### RÉSULTATS ET ANALYSE

Dans ce chapitre, nous avons cherché à appliquer les divers outils mis au point sur un cas pratique fourni par General Electric, et pour lequel leur équipe de concepteurs a fourni une solution issue de l'intégration d'années d'expériences sur des projets similaires. Notre discussion portera donc sur l'analyse des solutions issues du processus d'optimisation, et sur une comparaison avec la solution obtenue par le partenaire industriel.

#### 4.1 Effets du maillage et convergence de la solution

L'utilisation d'un algorithme d'optimisation quel qu'il soit dans la recherche d'un optimum nécessite de pouvoir évaluer la fonction objectif avec précision pour une configuration donnée de façon relativement précise. Il est ainsi nécessaire d'effectuer une simulation exacte et réaliste de l'écoulement autour du profil d'avant-directrice dans le but de garantir que la solution trouvée se rapproche effectivement de la solution réelle. Il est donc important d'ajuster un certain nombre de paramètres de la chaîne de calcul décrite précédemment afin d'obtenir une prédiction précise des performances de la configuration simulée. Cette précision nous permettra d'une part de garantir l'efficacité de la méthodologie d'optimisation, et d'autre part de s'assurer que la solution obtenue réponde effectivement au problème posé.

Un des éléments déterminant pour cette précision de la prédiction de l'écoulement est bien évidemment le maillage du domaine de calcul. En effet, un maillage très grossier et peu adapté conduira à une prévision approximative, voire même in-

exacte, du comportement de l'écoulement et donc des performances du dispositif. Un raffinement du maillage peut corriger ces imperfections, à condition que celui-ci soit bien adapté au problème que l'on souhaite résoudre. Il faut comprendre ici que le qualificatif «adapté» signifie que la répartition et aussi la forme des mailles réalisées soient acceptable pour la taille du maillage (c'est-à-dire le nombre de mailles).

Dans notre cas, il est nécessaire de concentrer le maillage aux abords des parois afin de modéliser avec précision les phénomènes de couche limite, et de respecter les critères établis sur la grandeur  $y^+$  lorsqu'on utilise une loi de paroi (voir (Hallbäck *et al.* (1996))) dans le cas turbulent. Il est également important de veiller à une bonne répartition des mailles dans le sillage du corps solide, cette région étant le siège de nombreux phénomènes physiques. Cette concentration doit en outre permettre d'obtenir des formes de mailles convenables en tout point, en partie afin de faciliter la convergence de la solution. Par ailleurs, dans le cas d'un maillage multi-blocs structuré tel qu'on se propose de construire, il est essentiel d'assurer une certaine continuité de la taille et de la forme des mailles aux abords de chacune des frontières des différentes zones pour ces mêmes raisons.

Enfin, il ne faut pas oublier que la taille du maillage et son aspect conditionnent la rapidité de convergence ainsi que le temps de calcul du solveur numérique, ce temps étant en fait un paramètre déterminant dans le cas des processus d'optimisation puisqu'il détermine en grande partie la durée nécessaire à l'obtention d'un design optimal.

Une étude a donc été réalisée afin d'évaluer l'effet du maillage utilisé sur la précision, la rapidité de convergence et le temps de calcul afin d'obtenir à l'issue de cette analyse un maillage résultant d'un compromis convenable entre l'exactitude de la prédiction et le temps nécessaire à son obtention.

Tout d'abord, lorsque l'on se propose d'effectuer une simulation numérique d'un écoulement, il est important de fixer le niveau de convergence souhaité de la solution calculée par le solveur. Ce contrôle s'effectue en fait par l'intermédiaire du critère de convergence, qui correspond à l'erreur maximale tolérée pour les résidus des grandeurs dominantes de l'écoulement. Cette convergence vers une solution est bien évidemment indispensable et permet en particulier de s'assurer de la cohérence des résultats, de sorte que le maillage et les conditions d'écoulement permettront d'obtenir la même solution, et ceci quelle que soit la solution de départ utilisée par le solveur. La figure 4.1 représente ainsi un exemple de l'évolution de la fonction coût par rapport à ce critère de convergence pour un maillage donné. On peut ainsi constater que la solution obtenue converge bien vers un certain point, et on peut considérer que la solution a bel et bien convergé pour une valeur du critère de convergence inférieure à  $5 \times 10^{-6}$ , puisque la différence entre la valeur de la fonction coût en ce point et la valeur finale est de l'ordre de  $10^{-6}$  (erreur relative de 0.007%). C'est donc vers cette dernière valeur que nous nous sommes dirigés lors des utilisations futures du solveur pour l'évaluation de la fonction objectif.

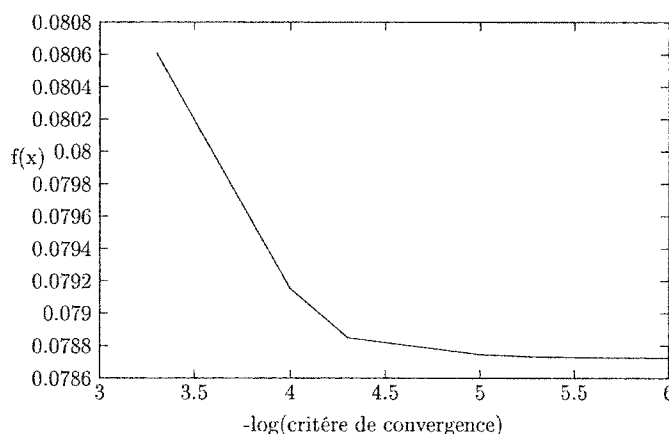


Figure 4.1 Convergence de la solution en fonction du résidu maximal

Nous avons donc pu constater qu'un maillage donné permettait, à condition de choisir un critère de convergence convenable, de converger vers une solution pour

l'écoulement qu'on se propose de simuler. Pourtant, le fait de converger vers un point ne signifie pas forcément que ce dernier corresponde parfaitement à l'écoulement qu'on pourrait observer dans la réalité. Comme énoncé précédemment, la taille du maillage et sa «physionomie» ont une influence déterminante sur la précision et l'exactitude de la solution obtenue. Ainsi, si on augmente le nombre de mailles utilisées, il est très probable que l'on se rapprochera de la solution réelle, à condition que l'aspect du maillage soit convenable (répartition et forme des mailles adaptées au cas simulé). La figure 4.2 représente à cet effet l'évolution de la fonction coût obtenue après convergence de la solution par rapport à la taille du maillage utilisé.

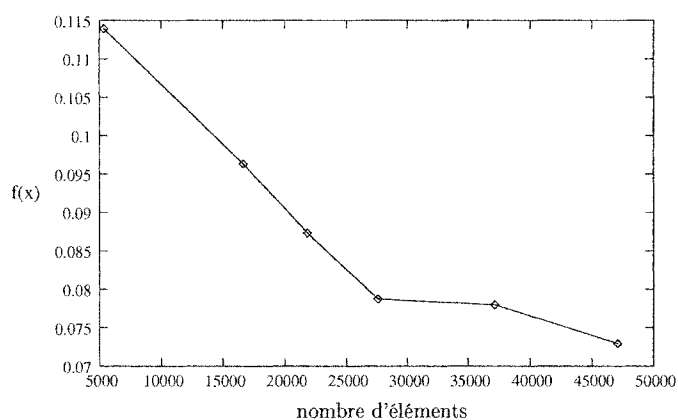


Figure 4.2 Convergence de la solution en fonction de la taille du maillage

On peut à la lueur de ce graphique noter que la solution a tendance à se rapprocher de façon quasi asymptotique d'une solution qu'il est raisonnable de considérer comme une solution indépendante du maillage : plus le nombre de mailles augmente, plus la précision de la solution augmente. Il nous faut par conséquent prendre en compte un autre paramètre afin de choisir le nombre d'éléments nécessaires pour simuler l'écoulement, puisque l'on serait amené à la vue de ce graphique à utiliser un maillage le plus raffiné possible. Ce second paramètre peut être trouvé de façon très naturelle dans le cadre d'un processus d'optimisation, puisqu'il est dans ce cas



essentiel de définir le temps maximal au bout duquel on désire obtenir une solution optimisée. Ceci nous amène donc à utiliser le temps de calcul afin de choisir le nombre de maille approprié. La figure 4.3 présente ainsi le temps nécessaire à l'obtention de la solution en fonction du nombre de mailles utilisées (les calculs ont été effectués sur un processeur Athlon 1394 Mhz).

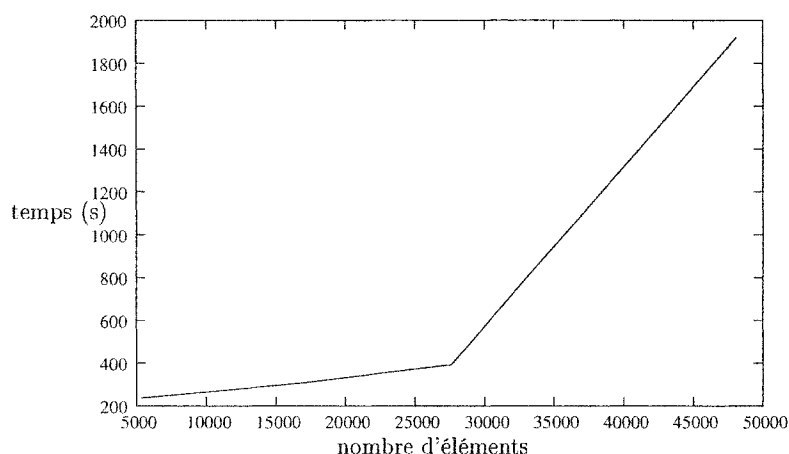


Figure 4.3 Temps de calcul en fonction de la taille du maillage

La figure 4.3 permet de se rendre compte que l'utilisation du maillage le plus précis est extrêmement dispendieuse, et que son utilisation est en conséquence difficilement abordable dans le cadre d'un processus d'optimisation. En effet, à cause des nombreux appels nécessaires aux divers algorithmes afin d'évaluer la fonction objectif pour un vecteur de design donné, un tel processus peut devenir inabordable, voire même inutile car trop long, et donc trop coûteux. Supposons par exemple que l'algorithme d'optimisation utilisé nécessite environ 500 appels au calcul de la fonction coût (nous verrons plus tard pourquoi nous avons choisi cette valeur), le temps que prendrait l'optimisation serait ainsi de l'ordre de 235 heures, soit près de 10 jours. Ceci est bien entendu inacceptable puisque de tels processus sont destinés à être appliqués dans des phases préliminaire de design, ce qui nécessite d'obtenir un résultat dans des délais assez brefs (1 ou 2 jours par exemple).

L'ensemble de ces remarques nous a donc amené à effectuer un compromis entre précision de la solution calculée et coût de son obtention, et ceci afin que la méthodologie d'optimisation puisse être applicable avec un coût raisonnable. Nous avons alors choisi d'utiliser un maillage comportant 27588 éléments, qui permet d'obtenir la meilleure précision possible compte tenu de la contrainte au niveau du temps, et qui permet généralement de converger vers un optimum en l'espace de 2 jours.

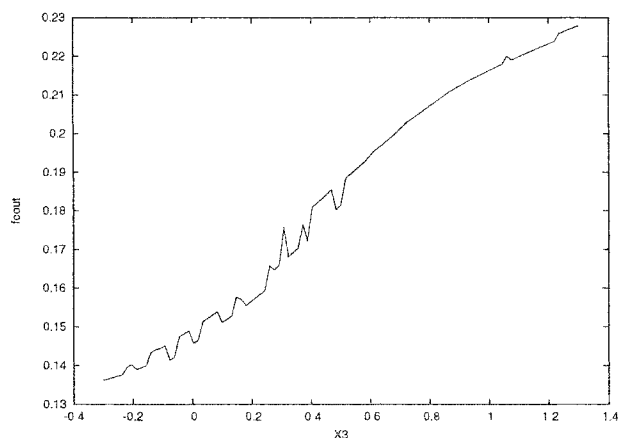
## 4.2 Analyse des sensibilités

L'utilisation de méthodes à gradients introduit également la nécessité d'effectuer une étude des sensibilités de la fonction coût utilisée pour les différentes variables de design afin de déterminer le ou les pas que l'on doit choisir pour calculer les gradients par différences finies. En effet, si le pas n'est pas approprié, les gradients de la fonction objectif en un point peuvent être inconsistants, ce qui conduira très rapidement à l'arrêt prématuré de l'algorithme. Cette inconsistance peut par exemple provenir du bruit inhérent à l'utilisation d'une chaîne de calcul numérique pour évaluer la fonction objectif. Enfin, il ne faut pas oublier que les algorithmes à gradients sont des méthodes locales d'optimisation ; leur utilisation peut ainsi conduire à l'obtention d'un minimum local, ce risque étant accru par un choix de pas de différenciation trop faible, puisque les chances de rester «pris» dans une vallée correspondant à un minimum local sont alors plus importantes.

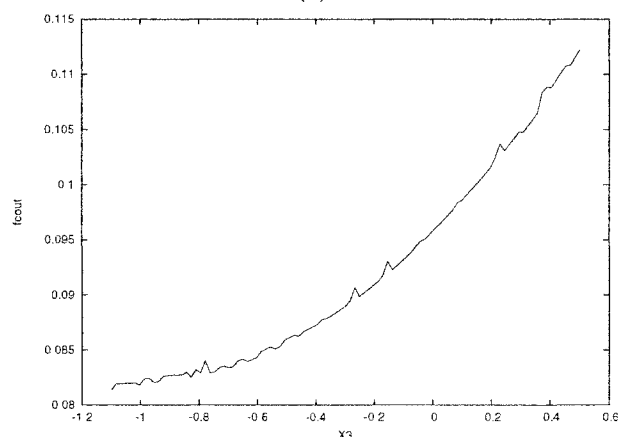
On voit donc ici que le choix du pas de différenciation utilisé est une étape déterminante pour l'efficacité de la méthode. Un moyen de trouver cette valeur peut être de choisir un ou plusieurs points de l'espace de design, et de tracer l'évolution de la fonction coût selon chacune des variables de design au voisinage de ce point. Les courbes obtenues nous permettent alors d'évaluer le niveau de bruit de la fonction dans cette région, et également de définir pour chaque variable les divers pas de

différenciation que l'on pourrait utiliser pour calculer la composante du gradient selon cette même variable. Un premier point est naturellement le vecteur de design initial. Cependant, dans le cas où ce point initial est dans une région très éloignée de celle de l'optimum, cette approche ne nous permet pas de visualiser l'allure et donc le bruit de la fonction objectif lorsque l'on se rapproche de cette zone. Dans notre cas, le profil de départ n'est pas du tout adapté à l'écoulement. En outre, le maillage ainsi que les réglages du solveur ont été conçus plus spécialement pour une certaine gamme de profils semblables aux profils optimaux, et ceci afin d'obtenir une meilleure précision dans ces régions, ce qui aura pour effet d'accélérer la convergence. Le niveau de bruit y est donc en général plus faible, et le pas de différenciation que l'on peut utiliser est par conséquent lui aussi plus petit. Nous avons alors choisi un autre point de l'espace de design situé dans une région plus proche des profils recherchés pour effectuer une deuxième étude des sensibilités.

Un exemple de courbes obtenues pour ces deux points est présenté sur les figures 4.4(a) et 4.4(b) et permet de vérifier ce qui vient d'être décrit.



(a)



(b)

Figure 4.4 Exemples de sensibilités dans une région centrée sur : (a) le point initial (b) un point proche de l'optimum

Le choix s'est ainsi porté non pas sur une valeur unique du pas de différenciation, mais sur un ensemble de valeurs pour cette grandeur, débutant avec un pas relativement grossier afin de se diriger rapidement vers la région avoisinant l'optimum et de réduire les risques de converger prématurément vers un optimum local. On réduit ensuite à deux reprises la valeur du pas afin de raffiner la solution obtenue. Notons que l'on utilise à chaque fois l'algorithme d'optimisation DONLP mais avec des réglages différents : on «durcit» progressivement les critères d'arrêt pour que les premières optimisations permettent de se placer rapidement et sans trop osciller

dans la région de l'espace de design qui contient l'optimum. Les critères de convergence de plus en plus sévères des dernières optimisations mettront donc l'accent sur la détermination précise de cet optimum et de façon plus efficace puisque la fonction coût y est moins bruitée.

### 4.3 Applications des méthodologies d'optimisation

#### 4.3.1 Choix de la méthode d'optimisation

Une forte proportion des travaux portant sur l'optimisation de composants de turbines hydrauliques ((Lipej et Poloni (2000); Sallaberger *et al.* (2001); Tomas *et al.* (2002))) repose sur l'utilisation des méthodes génétiques comme algorithme d'optimisation. Nous avons donc cherché à explorer cette voie et à déterminer la pertinence de l'utilisation de tels algorithmes dans notre cas.

Nous avons pour cela choisi des conditions en entrée correspondant à un angle de l'écoulement de 20 degrés, et effectué une optimisation en utilisant la méthode génétique disponible dans iSIGHT (algorithme génétique «multi-îles»). Pour cette optimisation, le nombre de générations a été fixé à 10, tout comme le nombre d'îles, et les sous-populations ont quant à elles une taille égale à 5, ce qui porte à 500 le nombre d'évaluations de la fonction coût nécessaire à l'optimisation.

Le profil obtenu à l'issue de l'application d'un tel algorithme est présenté sur la figure 4.5, et permet effectivement d'améliorer les performances de l'avant-directrice puisque la fonction coût est passée de 0.181456 pour le profil initial à 0.092993 pour le profil final, ce qui correspond à une réduction de près de 50% des pertes de charges générées par le profil.

Ce résultat impressionnant est cependant obtenu à un coût relativement élevé

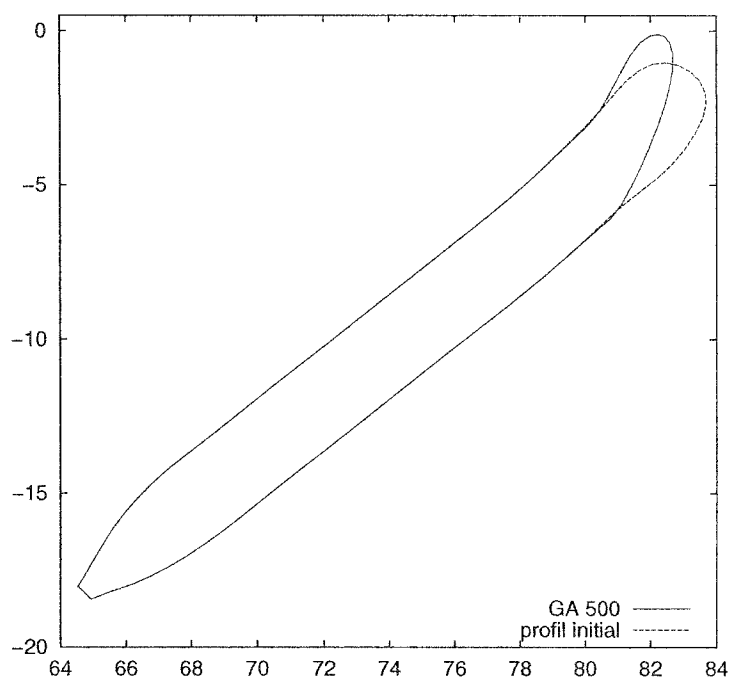


Figure 4.5 Profil optimisé par la méthode génétique pour un angle d'entrée de 20 degrés

puisque'il a fallu plus de 3 jours pour effectuer cette optimisation. En outre, le profil obtenu ne correspond pas à un optimum puisque les méthodes à gradients nous ont permis d'obtenir une configuration pour laquelle la fonction coût est encore meilleure, le tout avec un temps de calcul également plus faible. Une rapide comparaison peut ainsi être effectuée grâce aux informations présentée dans le tableau 4.3.1 ci-après.

Tableau 4.1 Comparaison des algorithmes génétiques et de DONLP

algorithme d'optimisation	nombre d'évaluations de la fonction coût	temps de calcul (h)	fonction coût
méthode génétique	500	74	0.092993
DONLP	345	32	0.077807

Il est important de remarquer que le temps de calcul ne dépend pas que du nombre

d'évaluations de la fonction coût, mais également de la méthode utilisée. Ceci est dû au fait que le solveur de TASCflow utilise la solution précédente comme solution de départ pour le nouveau calcul. Donc, dans le cas où la nouvelle configuration du profil est proche de la précédente, ce qui se produit souvent lors de l'utilisation d'algorithmes à gradients, le temps nécessaire pour la résolution de l'écoulement sera réduit de façon conséquente.

Ces remarques nous ont amené à privilégier l'utilisation d'algorithmes à gradients puisqu'ils s'avèrent être plus efficaces que les méthodes génétiques. Par conséquent, l'ensemble des optimisations à venir a été réalisé à l'aide d'une utilisation séquentielle de DONLP au cours de laquelle on réduit successivement le pas de différenciation tout en imposant des critères de convergence de plus en plus sévères.

### 4.3.2 Optimisations «single-point»

Nous nous proposons dans un premier temps de présenter les résultats obtenus pour les optimisations menées pour un seul point de fonctionnement, et de comparer les comportements caractéristiques de l'écoulement ainsi que les performances des différents profils pour chacun des régimes étudiés.

La résolution des problèmes d'optimisation décrits dans la section 1.4.1 en divers points de fonctionnement nous a fourni les profils représentés sur la figure 4.6. Notons que les coordonnées des points de ces profils ont été adimensionnalisées par rapport au diamètre de la roue de la turbine.

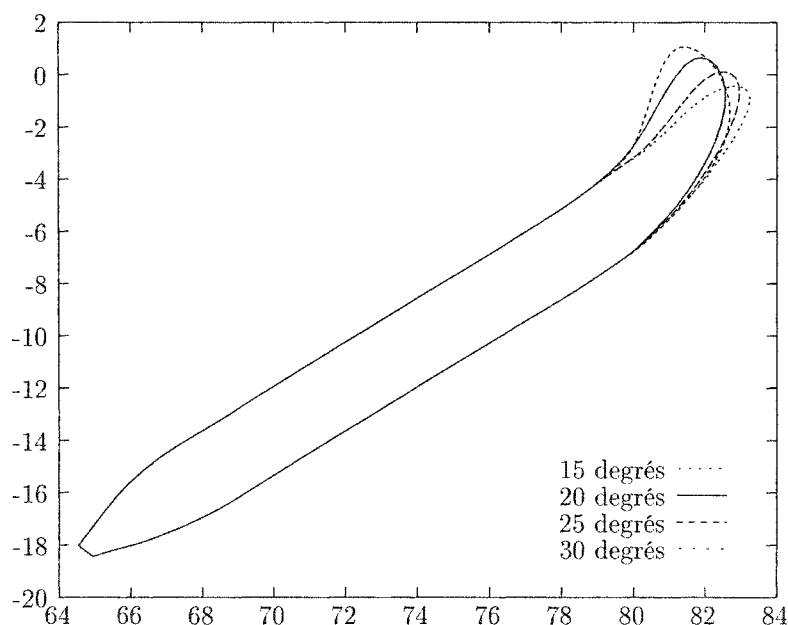


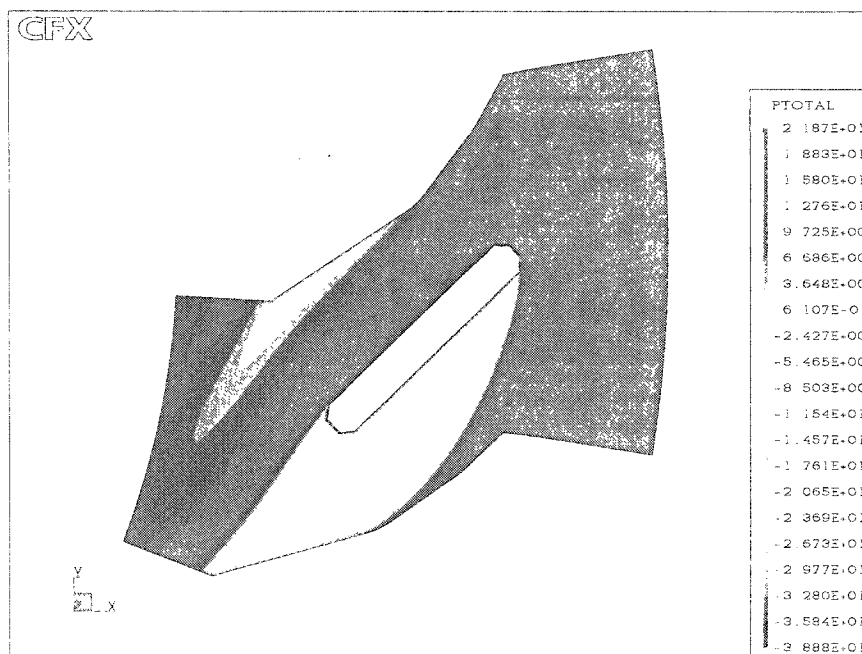
Figure 4.6 Profils obtenus par les optimisations pour chacun des angles d'entrée

Il est possible de remarquer que plus l'angle d'incidence de l'écoulement par rapport au profil est élevé (ce qui correspond à un faible angle en entrée par rapport à la tangente à la frontière amont du domaine), plus la déviation de la ligne de cambrure dans la région du bord d'attaque de l'aube optimisée est importante. Ceci démontre

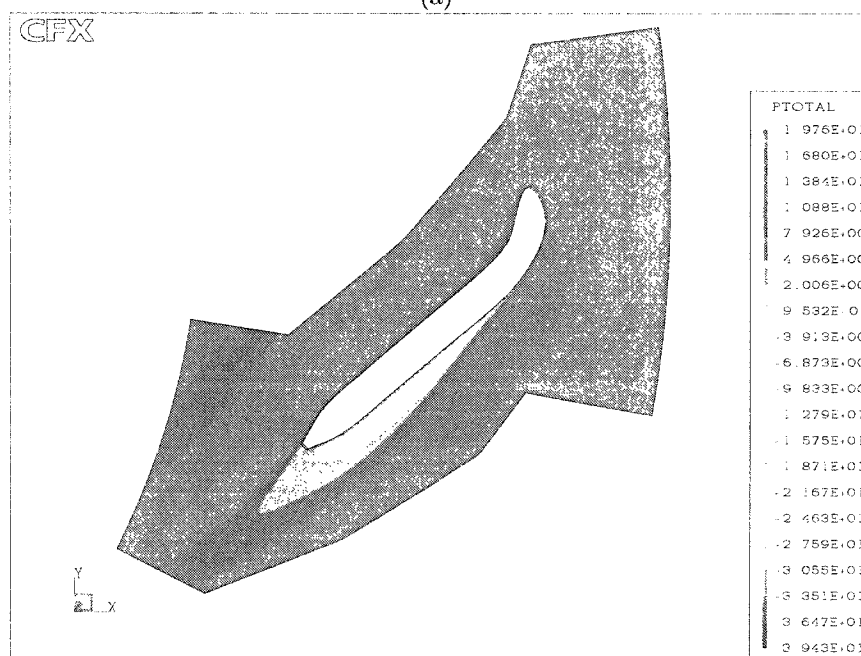


que l'optimiseur tend à orienter cette région du bord d'attaque dans la direction de l'écoulement amont afin d'amener le fluide le plus progressivement possible dans la direction parallèle au corps de l'aube, et d'éviter un décollement précoce de l'écoulement au niveau de l'extrados.

Les figures 4.7 à 4.10 permettent de vérifier les gains générés par ces modifications puisqu'elles représentent les distributions de pression totale pour le profil initial d'avant-directrice (c'est-à-dire l'aube déjà existante) et le profil optimisé. On peut noter que quel que soit le régime d'écoulement, l'optimisation réduit les pertes de charge causées par le profil en réduisant l'étendue de la zone de recirculation située sur l'extrados de l'aube ainsi que les effets de traînée. L'optimisation de la région amont de l'aube limite voire supprime le décollement de l'écoulement, et donc les pertes énergétiques qui en découlent. Par ailleurs, ce repositionnement d'une partie du profil vers la direction amont du fluide et les modifications de ce dernier près du bord d'attaque permettent de diminuer l'importance du phénomène de réduction de vitesse en amont, facilitant la pénétration de l'aube dans l'écoulement en détournant celui-ci plus efficacement (limitation de l'étendue de la zone de stagnation près du bord d'attaque).



(a)



(b)

Figure 4.7 Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 15 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé

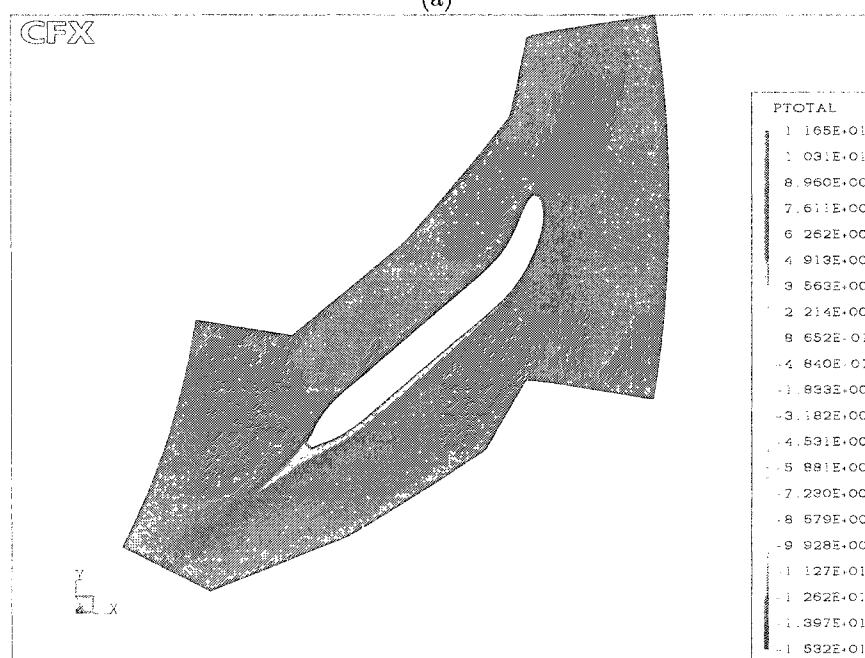
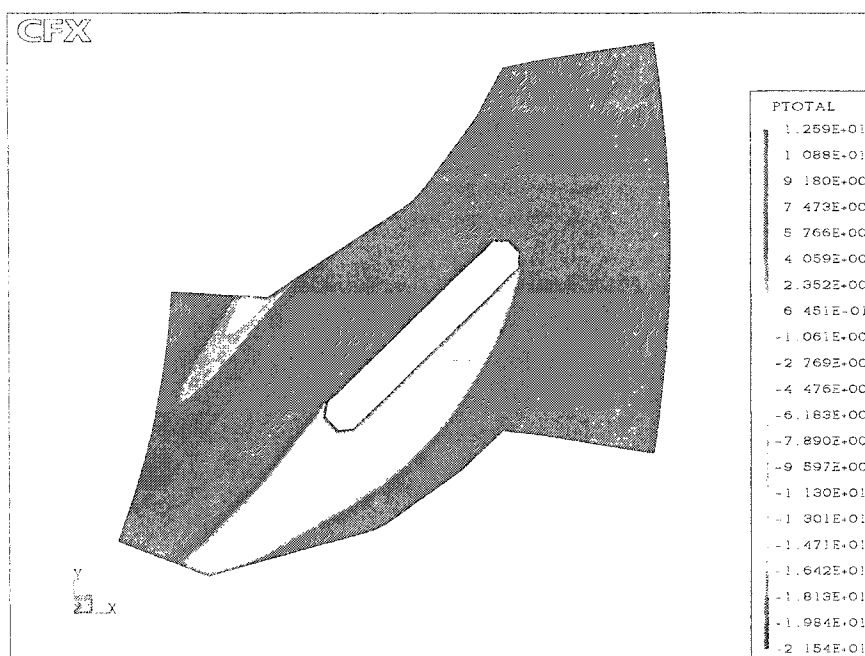
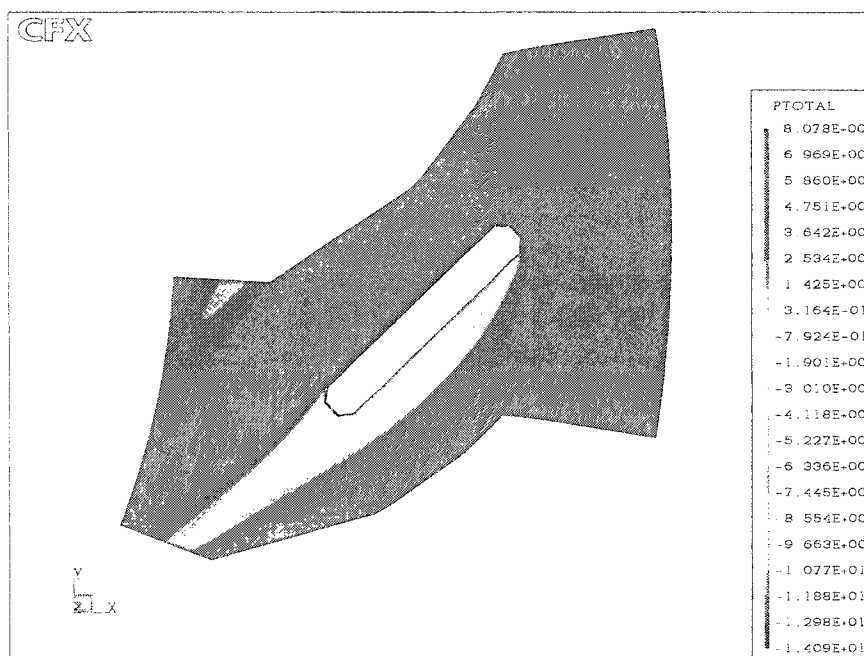
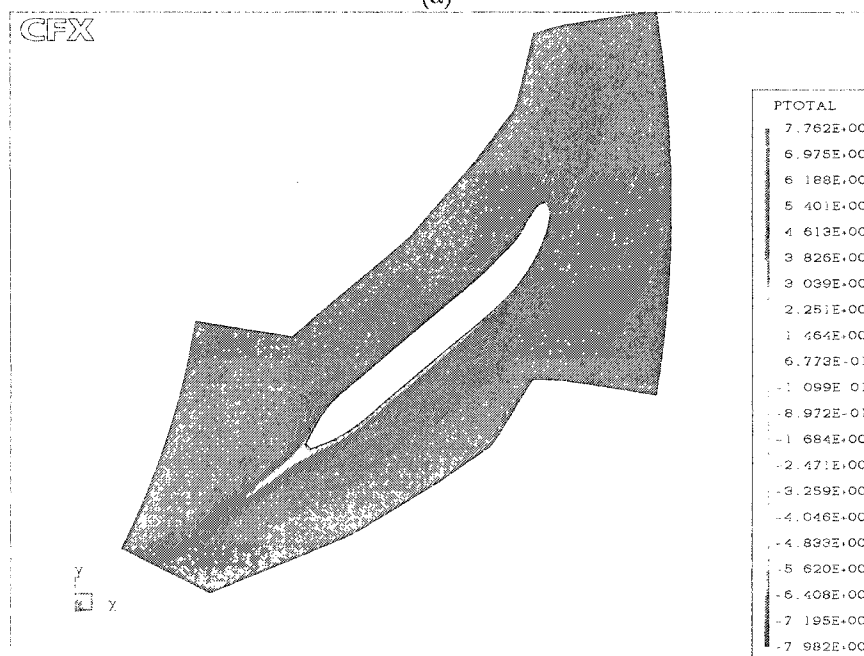


Figure 4.8 Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 20 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé



(a)



(b)

Figure 4.9 Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 25 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé

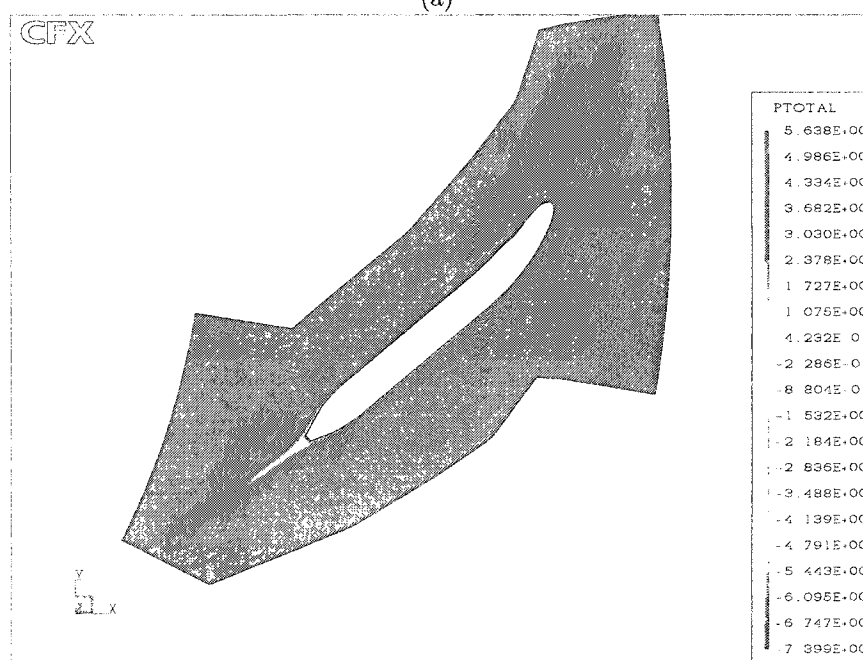
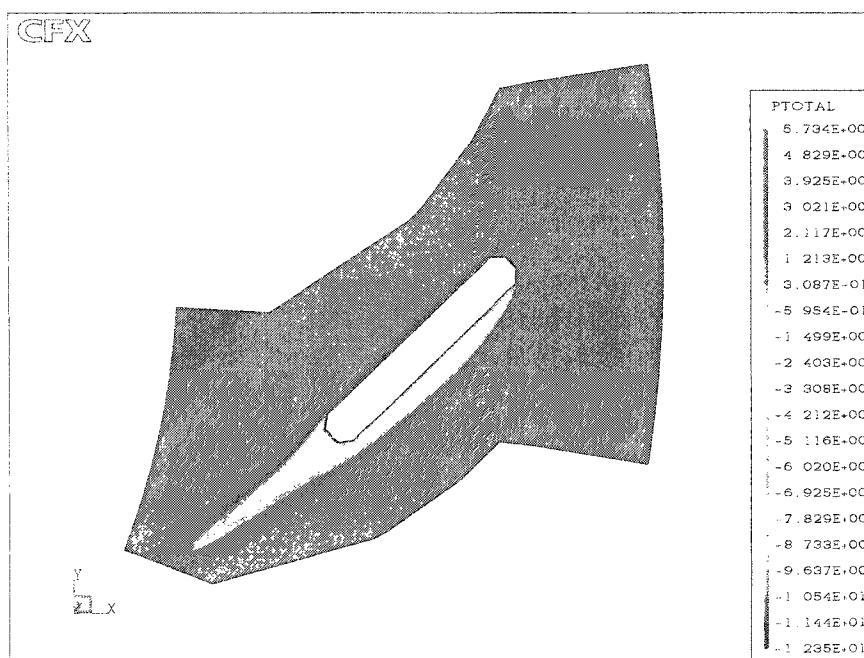


Figure 4.10 Répartition de la pression totale pour un angle d'entrée de 30 degrés et avec : (a) le profil initial (b) le profil optimisé

Les figures 4.11 à 4.13 permettent d'illustrer les effets de l'optimisation sur le comportement de l'écoulement, en particulier au niveau de la zone de séparation. Celle-ci génère en effet de nombreuses pertes et perturbations dans l'écoulement. Au regard de ces figures, il est clair que l'optimisation limite nettement son importance. Il est important de noter que le rajout de matière en amont et la modification de la région du bord de fuite lors de la phase précédent l'optimisation contribuent à réduire légèrement l'ampleur de ces phénomènes, mais ne permettent pas de les supprimer. L'impact de l'optimisation à proprement parler s'avère donc très positif puisque le profil optimisé ne présente qu'une zone de recirculation de très faible taille dans une région proche du bord de fuite, ce phénomène semblant inévitable compte tenu de la configuration du profil dans cette zone (on ne modifie au cours de l'optimisation que la région du bord d'attaque).

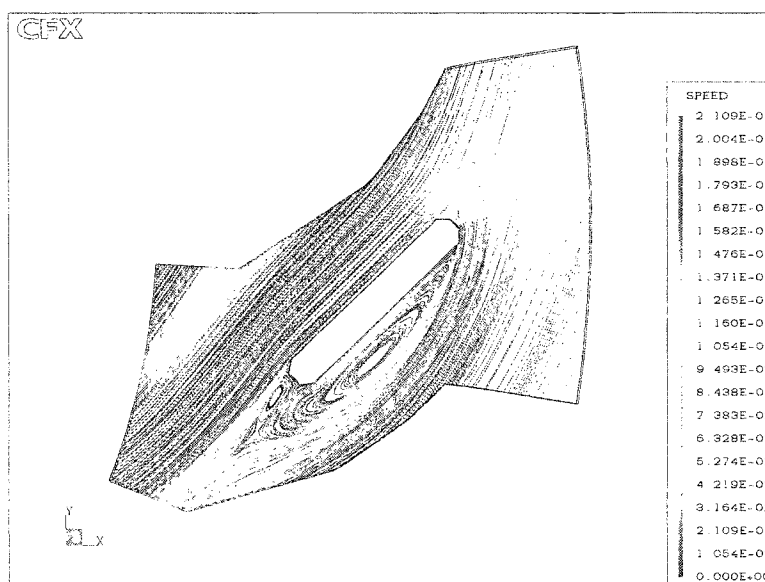


Figure 4.11 Lignes de courant obtenues avec le profil initial pour un angle d'entrée de 20 degrés

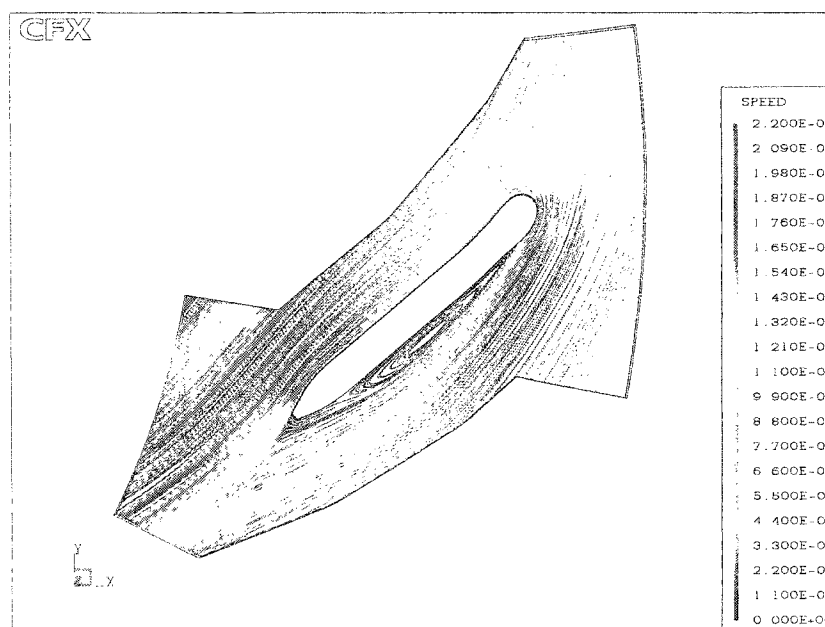


Figure 4.12 Lignes de courant obtenues avec le point de départ de l'optimisation pour un angle d'entrée de 20 degrés

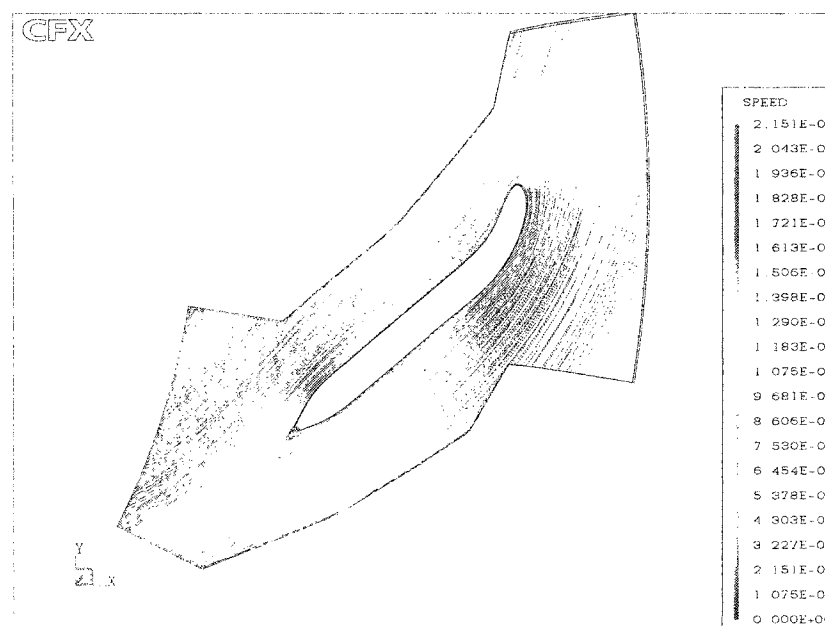


Figure 4.13 Lignes de courant obtenues avec le profil optimisé pour un angle d'entrée de 20 degrés

Afin de quantifier et de comparer les améliorations constatées, les performances des différents profils initiaux et optimisés ont été reportées dans le tableau 4.3.2. On peut alors distinguer deux contributions majeures à l'amélioration du comportement du profil pour des conditions en entrée données :

- le passage du profil de l'aube initiale au profil servant de point de départ pour l'optimisation permet de réduire sensiblement les pertes. Ces progrès sont en grande partie dus à un rajout de matière au niveau de la région du bord d'attaque, ce qui permet de réduire les angles «vifs» du profil générateurs d'importantes perturbations, et également à une modification de la région du bord de fuite qui réduit les effets de sillage.
- l'optimisation qui permet de réduire de façon notable les pertes de charges.

Il faut toutefois remarquer que la proportion des gains uniquement dus à l'optimisation par rapport aux gains du processus de réhabilitation dans sa globalité varient légèrement en fonction des conditions en entrée. En effet, la part des améliorations apportées par l'optimisation est d'autant plus importante que le régime d'écoulement est sévère, puisque dans ces cas-là des modifications sommaires du profils ne permettent pas de résoudre tous les problèmes rencontrés. Ainsi, le fait de simplement rajouter de la matière dans la zone du bord d'attaque est relativement efficace pour les écoulements à faible angle d'incidence par rapport à la pale, mais perd de son intérêt à mesure que les conditions d'opération sont exigeantes, nécessitant ainsi une définition plus complexe de la partie ajoutée en amont obtenue par exemple par un processus d'optimisation.



Tableau 4.2 Résultats des optimisations «single-point»

angle d'écoulement en entrée	valeur de la fonction coût			réduction de la fonction coût (%)	
	avant la réhabilitation	point de départ de l'optimisation	profil optimisé	optimisation	réhabilitation
15 degrés	0.399335	0.308876	0.177468	42.54	55.56
20 degrés	0.301366	0.181481	0.077807	57.13	74.18
25 degrés	0.206201	0.084903	0.053347	37.17	74.13
30 degrés	0.153140	0.061995	0.043988	29.03	71.28

### 4.3.3 Comportement «off-design»

Dès lors que l'on a obtenu les profils optimaux pour chacun des angles d'écoulement en entrée, il est nécessaire d'évaluer leur performance résultant de changements de régime d'opération. Le tableau 4.3.3 résume les performances des profils pour chacune des conditions en entrée considérées. Il est alors important de vérifier que chacun des profils a effectivement un comportement optimal pour le point pour lequel il a été optimisé. On peut également constater qu'un changement de l'angle en entrée pénalise de façon conséquente les performances par, ce qui illustre le manque de polyvalence des optimum que l'on obtient.

Tableau 4.3 Pertes de charge des profils obtenus par des optimisations ponctuelles

régime utilisé pour l'optimisation	Fonction coût selon l'angle d'entrée			
	15 degrés	20 degrés	25 degrés	30 degrés
15 degrés	<b>0.177468</b>	0.091038	0.091749	0.129311
20 degrés	0.182173	<b>0.077807</b>	0.060080	0.070864
25 degrés	0.210406	0.084875	<b>0.053347</b>	0.047114
30 degrés	0.259078	0.116565	0.058004	<b>0.043988</b>

Ces différents résultats nous prouvent donc que les optimisations en un seul point sont très efficaces pour le régime ciblé, mais que cette efficacité ponctuelle va de pair avec une altération des performances dans des conditions «off-design», ce qui justifie l'application par la suite du concept d'optimisation multi-points.

#### 4.3.4 Optimisations multi-points

La présence de deux zones principales au sein de la couronne avant-directrice nous amène à avoir recours à une optimisation multi-points pour chacune de ces zones.

Nous rappelons ici que cette fonction coût, dont l'expression est fournie par les relations (3.1) ou (3.2), fait appel aux pertes de charge en chacun des points utilisés, et à leur valeur cible et initiale. Nous avons donc utilisé comme valeurs cibles les valeurs des optimum trouvés pour tous ces points, c'est-à-dire les résultats des optimisations ponctuelles.

Les figures 4.14(a) et 4.14(b) présentent les profils issus des optimisations multi-points pour chacune des deux zones et ceux obtenus par des optimisations ponctuelles. Il apparaît alors que les profils obtenus au cours de telles optimisations constituent bel et bien un compromis entre les divers régimes d'écoulement. Le tableau 4.3.4 confirme cette observation en présentant les performances de ces deux profils pour les différents points de fonctionnement.

Tableau 4.4 Performances des profils issus des optimisations multi-points

profil obtenu par l'optimisation multi-points	Fonction coût ponctuelle selon l'angle d'entrée			
	15 degrés	20 degrés	25 degrés	30 degrés
zone 1 (20-25-30 degrés)	0.224391	0.092412	0.053616	0.044110
zone 2 (15-20-25 degrés)	0.201544	0.080330	0.056978	0.059685

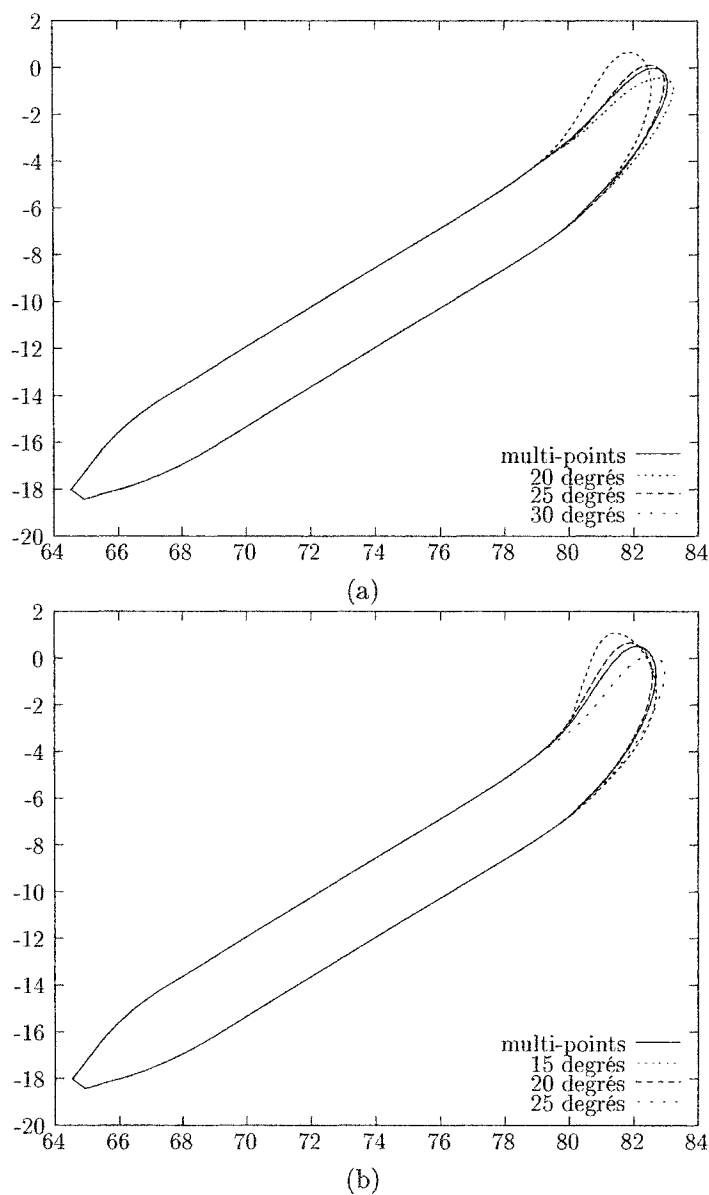


Figure 4.14 Résultats des optimisations multi-points et «single-point» pour des angles en entrée de : (a) 20, 25 et 30 degrés (b) 15, 20 et 25 degrés

Afin de mieux comparer les profils obtenus, nous avons calculé les pertes de charges générées pour les divers angles d'entrée. De plus, le résultat obtenu a été adimensionalisé de la même façon que pour la fonction coût multi-objectifs, c'est-à-dire en utilisant pour chacun des régimes la valeur correspondant au point initial  $f_i^{worst}$  et au résultat de l'optimisation ponctuelle  $f_i^*$ . Donc, pour chacun des angles, nous

avons évalué l'expression suivante :

$$\frac{f_i(x) - f_i^*}{f_i^{worst} - f_i^*} \quad (4.1)$$

Les résultats obtenus sont alors présentés sur la figure 4.15.

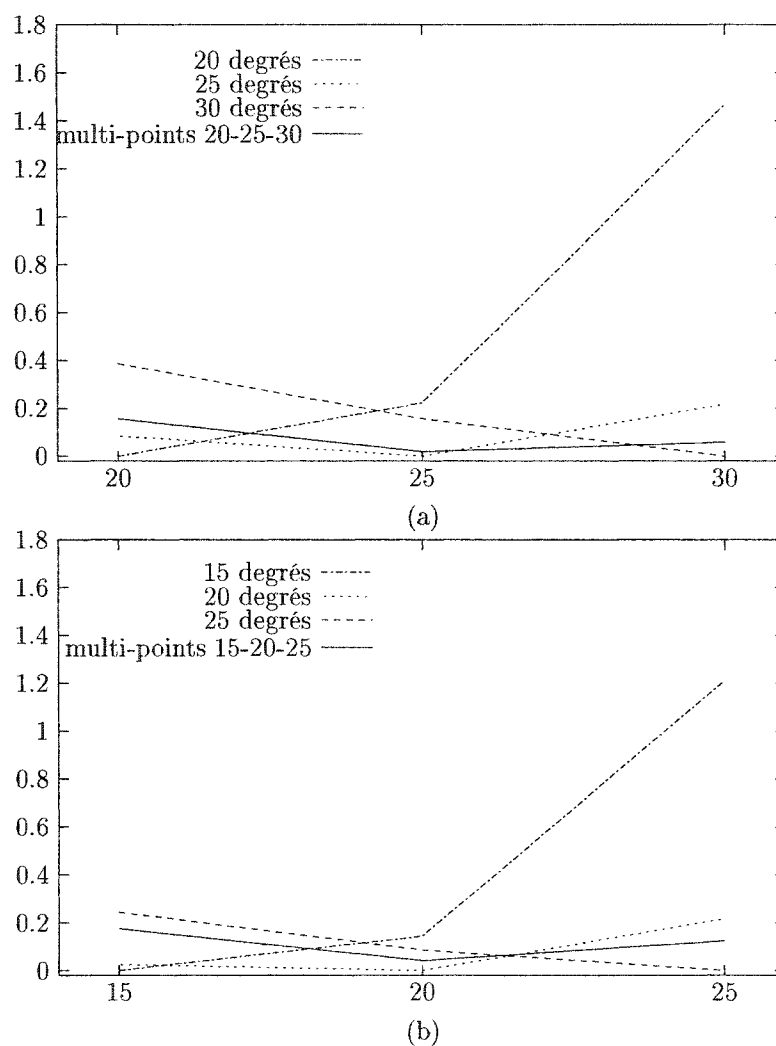


Figure 4.15 Comparaison des optimisations multi-points et «single-point» pour les deux zones étudiées : (a) zone 1 (20-25-30 degrés) (b) zone 2 (15-20-25 degrés)

Il paraît important de remarquer que étant donnée la combinaison des poids de la fonction multi-objectifs identique pour les deux zones (poids du point central

deux fois plus grand que ceux des autres points), la valeur de cette fonction multi-objectif est proportionnelle à l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe ainsi tracée. L'optimisation multi-points revient donc à minimiser cette aire.

Ceci met à nouveau en évidence le fait que les profils «single-point» présentent des performances optimales pour leur point de design, et que leurs performances se dégradent rapidement si on modifie les conditions en entrée. En revanche, les profils obtenus au cours d'optimisations multi-points ont un comportement généralement plus proche du comportement optimal pour une gamme étendue de régimes de fonctionnement, ce qui permet d'éviter les augmentations brutales des pertes de charges sur l'ensemble du domaine.

Les solutions multi-points résultent de compromis effectués entre les différents régimes, les «choix» stratégiques de ces compromis dépendant en partie des poids attribués à chacun des points. Cette influence des poids des diverses composantes semble être vérifiée puisque les profils multi-points obtenus pour chacune des deux zones présentent des performances pour le régime central très proches des performances optimales à un point.

Il faut toutefois rappeler que l'existence d'une solution unique au problème d'optimisation multi-points n'est pas assurée, puisqu'il peut exister à priori plusieurs combinaisons des diverses fonctions coût conduisant à la même valeur finale. Le résultat obtenu sera par conséquent le fruit d'un compromis prescrit par la structure de la fonction coût.

Ainsi, en ce qui concerne la première zone, on remarque que le profil résultant de l'optimisation multi-points présente de très bonnes performances pour deux régimes (25 et 30 degrés) aux dépens du troisième régime pour lequel les pertes de charges sont relativement éloignées de celles de l'optimum. Pour ce qui est de la deuxième

zone, on peut noter que bien qu'ayant une efficacité quasi constante sur l'ensemble du domaine, le profil multi-points semble correspondre à un optimum local, puisque la valeur de la fonction coût multi-objectifs alors obtenue est inférieure à celle correspondant au profil optimisé pour un angle de 20 degrés. Ceci nous prouve donc que malgré l'élaboration d'un plan stratégique à plusieurs pas de différenciation, les chances que l'algorithme à gradients converge vers un optimum local sont réelles, bien que plus faibles. En outre, il est possible que la nature même du problème multi-points augmente les risques d'obtention d'un optimum local, compte tenu de l'introduction possible des optima locaux de chacune des fonctions coût ponctuelles dans la fonction multi-points. Ceci peut multiplier le nombre des «vallées» correspondant à des optima locaux, compliquant ainsi l'obtention de l'optimum global dans le cas où il existe.

#### 4.4 Validation avec le partenaire industriel

Afin de mieux pouvoir évaluer la pertinence des résultats obtenus par la mise en application de la méthodologie d'optimisation décrite précédemment, nous avons comparé les profils multi-points avec la géométrie obtenue par l'équipe de conception de General Electric. Cette solution résulte de l'intégration de nombreuses années d'expérience dans les projets de réhabilitation. Cette conception est en grande partie empirique et nécessite l'intervention de plusieurs personnes dans un processus d'«essai-erreur», sans intervention d'un optimiseur.

Le profil obtenu par une telle approche pour la première zone (angles d'entrée compris entre 20 et 30 degrés) est présenté sur la figure 4.16, et comparé au profil issu de l'optimisation multi-points pour cette même zone.

Les pertes de charges pour les différents angles d'écoulement et les valeurs de la

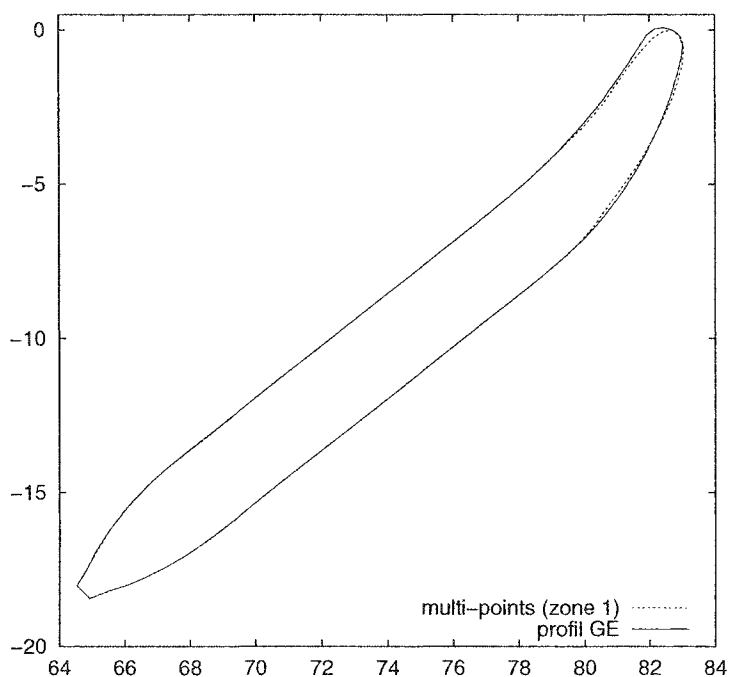


Figure 4.16 Comparaison du profil obtenu par le partenaire industriel et du résultat de l'optimisation multi-points

fonction coût de la première zone ont été calculées et sont reportées dans la tableau 4.5.

Tableau 4.5 Comparaison des performances du profil obtenu par le partenaire industriel et du résultat de l'optimisation multi-points

type de profil	Fonction coût ponctuelle selon l'angle d'entrée				fonction objectif multi-points (zone 1)
	15 degrés	20 degrés	25 degrés	30 degrés	
profil de GE	0.227136	0.092336	0.055621	0.050615	0.180046
zone 1 (20-25-30 degrés)	0.224391	0.092412	0.053616	0.044110	0.063306

Il est à ce stade nécessaire de rappeler que l'expérience des ingénieurs et le grand nombre de projets déjà accomplis permettent d'obtenir une solution offrant de très bonnes performances. Ceci nous indique donc que le profil ainsi conçu représente un très bon point de repère afin de vérifier l'efficacité de la méthode multi-points.

Ces divers résultats permettent alors d'effectuer une première validation de la méthodologie établie puisque son application conduit à un profil relativement proche de la solution obtenue par l'équipe de conception du partenaire industriel. En effet, la solution obtenue par un optimiseur permet d'obtenir une amélioration du comportement de l'aube sur l'ensemble de la plage de fonctionnement, les pertes de charges en un régime donné et la fonction coût multi-points étant systématiquement inférieures à celle du profil obtenu par General Electric. Ainsi, la valeur de la fonction coût multi-objectifs du profil optimisé est très nettement inférieure à la valeur calculée pour le profil de General Electric, puisque l'optimisation donne lieu à amélioration de près de 70% de la fonction considérée.

Par ailleurs, plusieurs simulations en trois dimensions ont d'ores et déjà été effectuées par le partenaire industriel à partir de profils intermédiaires ; les simulations avec les profils finaux sont quant à elles en cours. Les résultats obtenus ont confirmé que les profils trouvés ont des performances proches de celles des profils de General Electric existants, et nous ont permis d'améliorer la prise en compte des effets tridimensionnels dans les optimisations multi-points.



## CONCLUSION

L'objectif de ce travail était d'élaborer une méthodologie d'optimisation visant à améliorer les performances globales de la couronne des avant-directrices dans le cadre de projets de réhabilitation. Nous avons adopté une paramétrisation basée sur les NURBS, ces courbes étant reconnues pour leur habilité à représenter une gamme étendue de profils à l'aide d'un nombre réduit de variables. Nous avons montré que cet outil de représentation peut inclure une partie des contraintes géométriques dans la paramétrisation du problème, ce qui a pour effet de réduire le nombre de contraintes du problème d'optimisation. Cette prise en compte implicite des contraintes garantit que les profils générés respectent systématiquement certaines exigences de continuité, tout en réduisant la complexité du problème d'optimisation à résoudre.

En outre, l'optimisation multi-points en deux dimensions réduit les coûts du processus de design, sans pour autant négliger totalement les effets tridimensionnels. Comme l'ont démontré les résultats obtenus, ces formulations multi-points permettent d'obtenir des profils au comportement amélioré sur un domaine étendu, évitant les phénomènes de dégradation des performances «off-design» souvent observés pour les profils issus d'optimisations ponctuelles. Les résultats ont également été comparés avec un design industriel. Les profils multi-points offrent alors une nette amélioration des performances par rapport au profil existant.

Il est néanmoins important de noter que la formulation multi-points est susceptible d'introduire un certain nombre d'optima locaux, puisque chaque fonction coût ponctuelle introduit possiblement dans la fonction multi-objectifs ses propres optima locaux. Ce phénomène peut compliquer la recherche d'un optimum global dans le cas où celui-ci existe, et amener l'algorithme d'optimisation à converger

vers un des optima locaux.

L'utilisation d'algorithmes d'optimisation réputés pour leur mode de recherche plus globale de l'optimum, tels les méthodes génétiques, peut être à première vue un moyen de résoudre ce problème. Pourtant, une étude comparative de cette méthode par rapport à l'utilisation séquentielle, avec réduction du pas de différenciation, d'un algorithme à gradients nous a permis de relativiser l'intérêt suscité par les algorithmes génétiques. En effet, ces derniers ont non seulement exigé un temps de calcul beaucoup plus important que la méthode à gradients choisie, mais ils ont également abouti à une solution présentant des performances très inférieures à celles obtenues par l'application du plan d'optimisation basé sur l'algorithme à gradients. Ceci nous indique que l'algorithme génétique n'avait pas encore réellement convergé, et que cette convergence aurait très probablement nécessité un nombre encore plus grand d'itérations. L'utilisation de ces méthodes s'avère donc inadaptée dans le cadre de problèmes de design préliminaires au sein duquel nous nous sommes placés, puisque le temps d'obtention d'une solution optimale est un facteur déterminant pour l'efficacité du processus mis en application.

Une autre possibilité serait d'utiliser une combinaison des deux types de méthodes envisagés, appliquant dans un premier temps les algorithmes génétiques afin de se placer grâce à une recherche plus globale dans une région de l'espace de design proche d'un optimum, et utilisant par la suite la rapidité de convergence des méthodes à gradients pour aboutir au design optimal. Cette option permet d'exploiter les points forts de chacune des méthodes, mais serait toutefois toujours trop dispendieuse en temps de calcul pour être applicable au cas des designs préliminaires.

Enfin, une dernière solution pourrait être d'effectuer plusieurs optimisations à l'aide des méthodes à gradients en choisissant différents points de départs afin de s'assurer de la quasi globalité du minimum obtenu. Le coût d'une telle option sera là encore

un inconvénient majeur pour son application dans des cas où l'on souhaite évaluer rapidement les performances atteignables pour une configuration donnée.

On voit donc que les divers moyens permettant de s'assurer d'une certaine globalité de la solution optimale obtenue sont très exigeants au niveau du temps de calcul nécessaire à leur application, et les rendent peu adaptés aux phases de design préliminaire. Leur utilisation serait en revanche justifiée dans le cadre de projets de design finaux, où il n'est alors plus question d'évaluer rapidement la faisabilité du projet, mais bien de trouver la configuration optimale tout en s'assurant qu'il n'en existe pas de meilleure.

La méthodologie vers laquelle nous nous sommes orientés semble offrir de bons résultats tant sur le plan des performances que sur celui du temps de calcul exigé. Elle fournit une très bonne approximation des performances envisageables pour une configuration donnée. Il serait néanmoins nécessaire d'exploiter les résultats des simulations 3D en cours afin d'affiner les paramètres des formulations multi-points, ce qui permettrait d'améliorer la prise en compte des effets tridimensionnels, et conduirait à une amélioration des performances globales de la couronne. Il serait aussi utile de s'assurer à l'aide d'une des diverses approches évoquées d'une certaine globalité de l'optimum obtenu, dans le cas où celui-ci serait destiné à être utilisé comme solution finale au projet de réhabilitation. Enfin, la formulation multi-points et la prise en charge de certaines contraintes de façon implicite pourraient être appliquées à un projet de design d'une nouvelle installation, ce qui permettrait également de tester l'efficacité de la paramétrisation hybride établie dans ce travail.

## RÉFÉRENCES

- BURMAN, J. ET GEBART, B. (2001). Influence from numerical noise in the objective function for flow design optimisation. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 11, 6–19.
- CASEY, M., BORTH, J. ET DRTINA, P. (1996). The application of computational modeling to the simulation of environmental, medical and engineering flows. *18th Workshop Proceedings*. Speedup Journal.
- CHEN, S., ZHANG, F., RENAUD, G. ET SHI, G. (2002). A preliminary study of wing aerodynamic, structural and aeroelastic design and optimization. *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Atlanta, Georgia.
- DRTINA, P. ET SALLABERGER, M. (1999). Hydraulic turbines-basic principles and state-of-the-art computational fluid dynamics application. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*.
- EISINGER, R. ET RUPRECHT, A. (2001). Automatic shape optimization of hydro turbine components based on CFD. *Seminar «CFD for Turbomachinery Applications»*. Gdansk.
- GEN, M. ET CHENG, R. (1997). *Genetic Algorithms and engineering design*. Wiley & sons , Inc.
- GOLDBERG, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley.
- GOULD, N. I. M. ET TOINT, P. L. (1999). SQP methods for large-scale nonlinear programming. *19th IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization*. Cambridge, England.

- HALLBÄCK, M., HENNINGSON, D., JOHANSSON, A. ET ALFREDSSON, P. (1996). *Turbulence and Transition Modelling*. Kluwer Academic Publishers.
- HUYSE, L., PADULA, S. L., LEWIS, R. M. ET L, W. (2002). Probabilistic approach to free-form airfoil shape optimization under uncertainty. 40, 1764–1772.
- KOZA, J. (1992). *Genetic Programming : On the programming of computers by means of natural selection*. Bradford Books, Cambridge, MA.
- LÉPINE, J., GUIBAULT, F., TRÉPANIER, J.-Y. ET PÉPIN, F. (2001). Optimized NonUniform Rational B-Spline geometrical representation for aerodynamic design of wings. 39, 2033–2041.
- LIPEJ, A. ET POLONI, C. (2000). Design of kaplan runner using multiobjective genetic algorithm optimization. *Journal of Hydraulic Research*.
- NEMEC, M. ET ZINGG, D. W. (2002). Multi-point and multi-objective aerodynamic shape optimization. *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Atlanta, Georgia.
- OYAMA, A. (2000). *Wing Design Using Evolutionary Algorithms*. Thèse de doctorat, Tohoku University.
- PAPALAMBROS, P. Y. ET WILDE, D. J. (2000). *Principles of optimal design*. Cambridge University Press.
- PENG, G., CAO, S., ISHIZUKA, M. ET HAYAMA, S. (2001). Design optimization of axial flow hydraulic turbine runner : Part I-an improved Q3D inverse method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- PENG, G., CAO, S., ISHIZUKA, M. ET HAYAMA, S. (2002). Design optimization of axial flow hydraulic turbine runner : Part II-multi-objective constrained optimization method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39, 533–548.

- PIEGL, L. ET TILLER, W. (1995). *The NURBS Book*. Springer-Verlag.
- RAW, M. (1985). *A new control-volume-based finite-element procedure for the numerical solution of the fluid flow and scalar transport equations*. Thèse de doctorat, University of Waterloo.
- RICHTER, R., WÖHLER, M. ET SCHILLING, R. (1999). Optimization system for hydraulic machinery. *Proceedings of the FEDSM99 : 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*. San Francisco, California.
- SALLABERGER, M., EISELE, K. ET CASEY, M. (2001). Accelerated design procedure for francis runners in rehabilitation projects. *Hydropower & Dams*.
- SALLABERGER, M., MICHAUD, C. ET BORN, H. (2002). Design and manufacture of francis runners for rehabilitation projects. *Hydropower & Dams*.
- SPELLUCCI, P. (1999). *DONLP2 Users Guide*. Program and user's guide available as donlp2.tar at <ftp://plato.la.asu.edu/pub/donlp2/>.
- SPELLUCI, P. (1998). An SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems. *Math. Prog.*, **82**, 413–448.
- TALBI, E.-G. (1999). Métaheuristiques pour l'optimisation combinatoire multi-objectif : État de l'art. Rapport technique, CNET.
- TOMAS, L., PEDRETTI, C., CHIAPPA, T., FRANCOIS, M. ET STOLL, P. (2002). Automated design of a francis turbine runner using global optimization algorithms. *Proceedings of the XXI<sup>st</sup> IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems*. Lausanne, Switzerland.
- VANDERPLAATS, G. N. (1999). *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. Vanderplaats Research & Development, Inc.
- WHERLI, M., BORTH, J., DRTINA, P. ET LANG, E. (1997). Industrial application of computational fluid dynamics for mass transfer processes. *19th Workshop Proceedings*. Speedup Journal.

ZHANG, F., CHEN, S. ET KHALID, M. (2001). Euler and Navier Stokes Optimizations of Airfoils Using Genetic Algorithms. *International Conference on Multidisciplinary Design in Engineering*. CSME-MDE 2001, Montreal, Canada.

## ANNEXE I

## PROBLÈME D'INTERPOLATION PAR UNE B-SPLINE

L'objectif défini par le problème d'interpolation est de représenter un profil obtenu par un grand nombre de points, une expression analytique ou tout autre forme d'interpolation comportant un grand nombre de paramètre par une B-spline définie à l'aide d'un nombre limité de paramètres, et ceci en conservant un niveau de précision satisfaisant. Le but de cette section est donc de présenter une méthodologie d'interpolation basée en grande partie sur des concepts développés par (Piegl et Tiller (1995)) et par (Lépine *et al.* (2001)).

Afin d'illustrer cette méthode, nous avons choisi comme courbe un profil de type NACA 0012 représenté sur la figure I.1 et destiné à être interpolé par une B-spline.

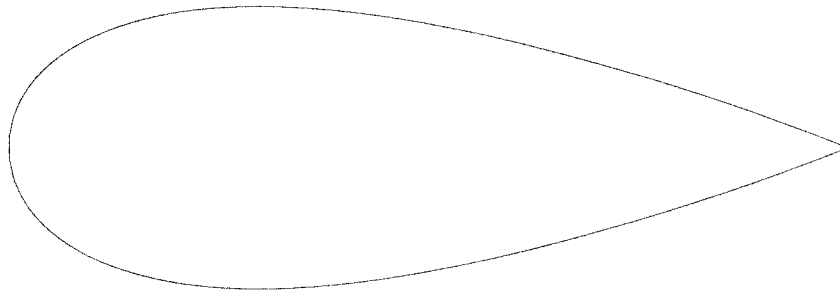


Figure I.1 Profil NACA 0012



## Rappels

Avant de procéder à l'interpolation de ce profil en tant que telle, il paraît nécessaire d'effectuer un bref rappel de la définition d'une B-spline et des notations auxquelles nous allons faire appel par la suite.

Une B-spline est définie par la relation suivante :

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) \mathbf{P}_i \quad (\text{I.1})$$

où

- $u$  est le paramètre de parcours ( $u \in [0, 1]$ )
- $n$  est le nombre de points de contrôle
- $P_i$  sont les vecteurs positions des points de contrôle
- $N_{i,p}(u)$  est la  $i$ ème fonction de base de degré  $p$  de type B-spline

Les fonctions de base utilisées sont définies à partir d'un vecteur nodal s'écrivant généralement sous la forme :

$$U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$$

où  $u_i$  sont les noeuds du vecteur nodal et  $m$  est la longueur de ce vecteur.

## Construction du vecteur nodal

Lors d'un problème d'interpolation, il est avant tout nécessaire de définir le vecteur nodal afin de pouvoir déterminer les fonctions de bases B-splines indispensables à la construction de la B-spline. Cette définition repose en fait sur la détermination de points de collocation notés  $\mathbf{Q}_i$  sur le profil que l'on désire interpoler, la courbe étant interpolée entre ces divers points. Il est à ce stade nécessaire de savoir où placer ces points sur la courbe, sachant que cette répartition peut avoir de lourdes conséquences sur la différence entre la courbe interpolée et le profil réel. Basant son raisonnement sur le fait qu'il est plus facile d'interpoler des parties de profil à faible courbure, (Lépine *et al.* (2001)) ont proposé une méthode permettant de répartir ces points de collocation en fonction de la courbure du profil, les concentrant ainsi dans les zones où celle-ci est la plus importante.

La figure I.2 illustre une répartition des points selon la courbure pour le profil NACA 0012 :

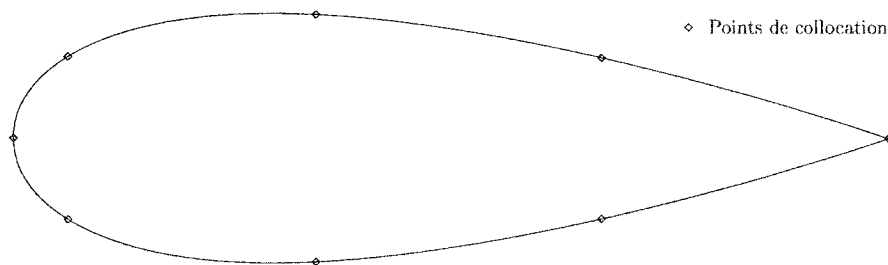


Figure I.2 Disposition des points de collocation

En outre, si on considère une telle série de points de collocation  $\mathbf{Q}_i$  ( $k = 0, \dots, n$ ), et si on fait correspondre à chacun de ces points un paramètre de parcours  $\bar{u}_k$ , le vecteur nodal  $U = \{u_0, \dots, u_m\}$  ayant été choisi de façon appropriée, il est possible d'explicitier le système linéaire de  $(n + 1)$  équations à  $(n + 1)$  inconnues sous la

forme :

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \quad (\text{I.2})$$

les points de contrôle  $\mathbf{P}_i$  étant les inconnues du système.

Ces points de collocation permettent également de construire le vecteur nodal à l'aide d'une méthode telle que la méthode de longueur de corde ou la méthode centripète. C'est cette dernière méthode qui a été choisie en raison de son efficacité pour les problèmes classiques d'interpolation où de fortes variations ont lieu. La méthode centripète s'applique alors de la façon suivante :

soit

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}$$

$$\text{et } \bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|}}{d} \quad k = 1, \dots, n-1$$

Les noeuds du vecteur nodal peuvent ainsi être obtenus par :

$$\begin{aligned} u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \\ u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p \end{aligned}$$

Ayant déterminé entièrement le vecteur nodal (et donc les fonctions de base B-splinaires) et les paramètres de parcours  $\bar{u}_k$  correspondant aux points de collocation, il est alors possible de résoudre le système formé par la relation (I.2) afin d'obtenir

les coordonnées de chacun des points de contrôle  $P_i$ . La figure I.3 représente la position de ces points de contrôle, le profil initial NACA 0012 et le profil interpolé par une B-spline cubique avec neuf points de contrôle.

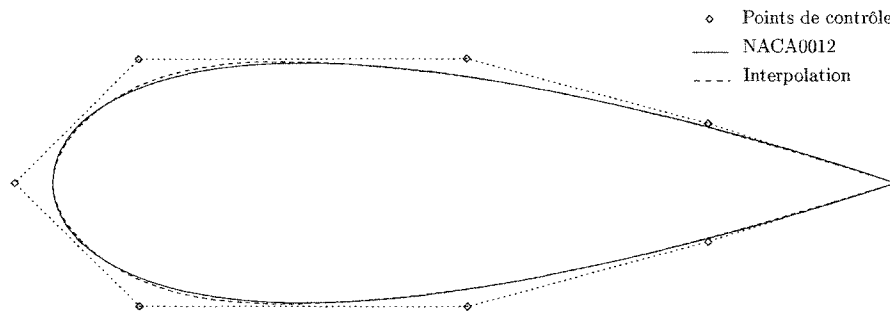


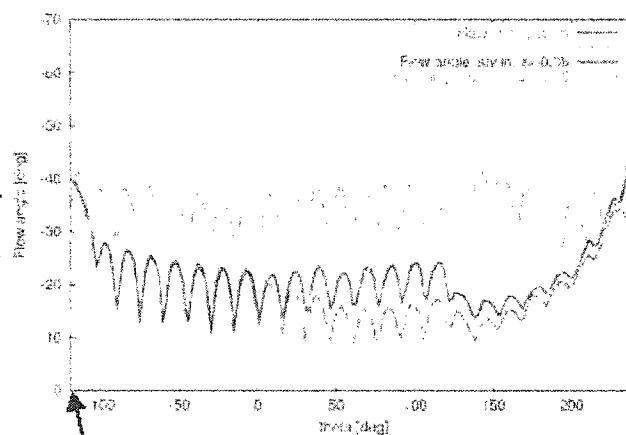
Figure I.3 Interpolation par une B-spline cubique à 9 points de contrôle

## ANNEXE II

## DISTRIBUTION DE L'ANGLE DE L'ÉCOULEMENT

Figure 20.  
Flow angle distribution near the leading edges and trailing edges of the stay vanes, in the proposed modified stay ring, for 2 elevation planes:

1. At the distributor centerline plane  $Z=0$
2. For  $Z=0.08 \cdot D_{th}$



Baffle Position

Piguet stay ring & modified stay vanes

Figure 21.  
Velocity vectors at the distributor centerline plane for the proposed modified stay ring and stay vanes

